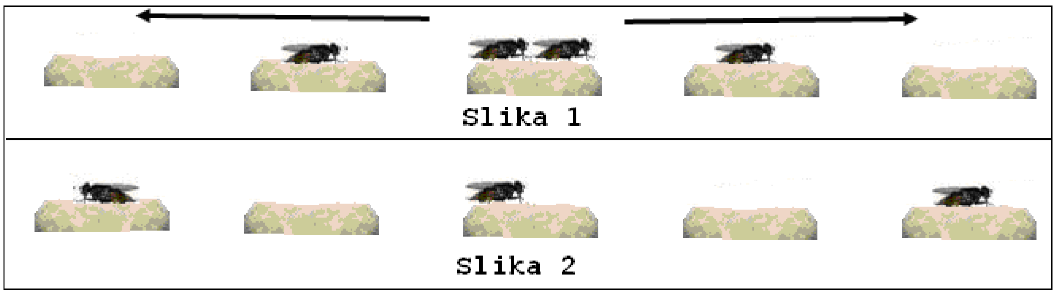
Olimpijada znanja 2016
Takmičenje iz programiranja za učenike srednjih škola
Rješenja zadataka

Zadatak 1 – Klopka

Pametni gušter je pripremio klopku za muve. Poređao je n slatkiša u red na međusobnom rastojanju od 1 cm. Gušter se hrani tako što jezikom dohvata neki slatkiš i pojede tačno jednu muvu sa njega. Pritom potroši količinu energije jednaku rastojanju do izabranog slatkiša. Muve koje su bile na tom slatkišu su paralizovane od straha i ne mrdaju sa mjesta. Muve koje su lijevo od tog slatkiša, pomjere se jedan slatkiš ulijevo a muve koje su bile desno od tog slatkiša pomjere se jedan slatkiš udesno. Na slici 1, gušter je ispružio jezik do srednjeg kamena i pojeo jednu muvu. Poslije tog poteza, ostale muve su rapoređene kao na slici 2.



Slika 1

Slika 2

Rastojanje guštera do najbližeg slatkiša je 1cm. Kada muve koje se kreću ka gušteru siđu sa slatkiša, direktno upadaju u njegova usta, pa on ne troši energiju. Napišite program koji izračunava najmanju količinu energije koju će potrošiti gušter da bi pojeo sve muve.

Ulaz: U prvom redu ulaza nalazi se cio broj n – broj muva. U drugom redu ulaza nalazi se n brojeva a_i, gdje a_i označava rastojanje i-te muve od guštera ($0 < n \leq 100000$, $0 < a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq 10^9$).

Izlaz: U jedini red izlaza štampati jedan cio broj – traženu minimalnu količinu energije.

Primjer:

Ulaz	Izlaz	Napomena
5 3 4 4 5 5	14	Gušter prvo pojede muve na rastojanju 5. Za to vrijeme, muve sa 4 pre•u na 2 a muva sa 3 pre•e na 1. Zatim gušter jede muve sa broja 2, a za to vrijeme muva sa 1 upada mu usta. Ukupna energija je 2·5+2·2=14

RJEŠENJE: Rješenje je linearno. Pretpostavimo da se gušter nalazi na krajnjoj lijevoj poziciji 0. Očigledno da gušter treba da krene od najudaljenijeg slatkiša. Krećemo se kroz niz od posljednjeg elementa ka prvom i uvećavamo brojač za svaku pojedenu muvu. Taj brojač nam pokazuje koliko se pozicija pomjerila svaka od preostalih muva. Energija se uvećava za razliku a[i] i brojača. Kada se dobije razlika manja ili jednaka od 0 zaustavljamo se, jer su sve muve stigle do guštera.

Zadatak 2 – Nizovi

Dati su prirodni brojevi p i s. Napišite program koji štampa koliko ima nizova cijelih nenegativnih brojeva sa n elemenata takvih da su im svi elementi manji od broja p i zbir svih elemenata niza je manji od s.

Ulaz: Iz jedinog reda ulaza učitavaju se tri cijela broja p, n i s, razdvojena sa po jednim blankom ($0 < p < s < 30$, $0 < n < 20$).

Izlaz: U jedini red izlaza štampati jedan cio broj – broj traženih nizova.

Primjer:

Ulaz	Izlaz

2 3 3	7

Napomena: Za dati primjer, nizovi (i njihovi zbirovi) su sljedeći:
`0+0+0=0; 1+0+0=1; 0+1+0=1; 0+0+1=1; 1+1+0=2; 1+0+1=2; 0+1+1=1`

RJEŠENJE: Označimo sa b(i,j) broj redova sa i elemenata koji imaju zbir j. Tada je b(i,0)=1 za svako i=1, …, n, b(1,j)=1, ako je j < p i b(1,j)=0, ako je j >= p. Veza između ovih brojeva za i > 1 i j > 0 je: b(i,j) = b(i-1,j) + b(i-1,j-1)+ … + b(i-1,j-p+1), jer se red sa i članova dobija od reda sa i-1 članom dodavanjem broja koji može biti između 0 i p-1.
Rješenje našeg zadatka je zbir b(n,0)+b(n,1)+…+b(n,s-1). Sada se kreira tabela (matrica) koja sadrži brojeve b(i,j), i=1,….,n, j=0,…, s-1.

Zadatak 3 – Grad

U Bajtgradu su sve ulice jednosmjerne. U gradu ima *n* raskrsnica numerisanih brojevima od 1 do *n*. Dat je spisak parova (*p*, *q*) raskrsnica koje su povezane jednosmjernom ulicom tako da na toj ulici nema drugih raskrsnica. Za svake dvije raskrsnice *p* i *q* postoji najviše jedna jednosmjerna ulica od *p* ka *q* ili od *q* ka *p*. Anja živi u zgradi koja se nalazi na raskrsnici *a* i želi da posjeti svoju prijateljicu Maju koja živi u zgradi na raskrsnici *b*. Postoji mogućnost da nije moguće automobilom putovati od raskrsnice *a* do raskrsnice *b* tako da se ne napravi nijedan prekršaj. Sa koliko najmanje prekršaja Anja može putovati od *a* do *b*? Svaki ulazak u jednosmjernu ulicu u nedozvoljenom smjeru je jedan prekršaj.
Ulaz: U prvom redu ulaza nalaze se tri cijela broja *n*, *a* i *b*, gdje je *n* ukupan broj raskrsnica, *a* je polazna i *b* ciljna raskrnica. U sljedećim redovima dati su parovi raskrsnica (*p*,*q*) koje su povezane jednosmjernom ulicom od *p* ka *q*. ($1 \le n \le 200\,000$, broj ulica nije veći od 400000).
Izlaz: U jedini red izlaza štampati jedan cio broj – minimalni broj prekršaja, Ako je moguće od *a* do *b* putovati bez prekršaja, štampati broj 0. Ako uopšte nije moguće stići od *a* do *b*, štampati slovo X.
Primjer:

Ulaz	**Izlaz**
4 1 4 1 2 2 3 4 3 4 2	1
4 1 4 4 2 2 3 4 3	X

RJEŠENJE: Dat je orijentisani graf i dva njegova čvora *a* i *b*. Potrebno je odediti najmanji broj grana koje treba obrnuti tj. okrenuti im orijentaciju tako da postoji put od *a* do *b*.
Svakoj postojećoj grani dodajmo cijenu 1. Dodajmo još po jednu granu u suprotnom smjeru sa cijenom koja je neki dovoljno veliki broj BIG (npr. 10^9). Primjenimo Dijkstrin algoritam za put od *a* do *b*. Ako postoji put, tada njegova dužina podijeljena sa BIG i zaokružena na dolje daje broj grana koje treba okrenuti. Složenost algoritma je $\Theta(n + m \,.\, \log m) = \Theta(n + m \,.\, \log n)$, ako se koristi prioritetni red.