Udruženje nastavnika matematike Crne Gore

Dijagonala

Matematički list za učenike osnovnih škola

Cijena 1,50 €

UMAN
+ UMAN
= NAUKA

BROJ 4 - GODINA 2019.

Udruženje nastavnika matematike Crne Gore

Matematički list za učenike osnovnih škola – „**Dijagonala**", **broj 4**

Godina 2019. Cijena: 1,50 €

Glavni urednik:	*mr Radomir Božović*
Odgovorni urednik:	*Danijela Jovanović*
Redakcija:	*Prof. dr Žarko Pavićević, Prof. dr Radoje Šćepanović, Miodrag Lalić, Prof. dr Milenko Mosurović, Snežana Irić, Aleksandra Vuković, Vanja Đurđić Kuzmanović, Irena Pavićević, Nevena Ljujić*
Lektura:	*Milja Božović, prof.*
Korektura:	*Danijela Jovanović, prof.*
Priprema za štampu:	*Branko Gazdić*
Tiraž:	*1000*
Štampa:	*„Studio Branko" d.o.o. – Podgorica*

Zavod za školstvo je odlukom broj 01 – 1214/2 od 03.09.2018. godine preporučio časopis „Dijagonala" za korišćenje u osnovnim školama kao pomoćno nastavno sredstvo.

Štampanje ovog broja pomogli:

„Bemax doo",
„14. septembar doo",
„Domen doo"

Sadržaj

Mr Miroje Begović

O NEJEDNAKOSTIMA IZMEĐU BROJEVNIH SREDINA I NJIHOVIM PRIMJENAMA

Radeći sa nadarenim učenicima primjetio sam da ova tema može da bude od koristi kako njima tako i nastavnicima koji pokazuju veći interes za rad sa talentovanim učenicima, te kao dobra priprema za razna matematička takmičenja.

U tom cilju objasnićemo SINTETIČKI i ANALITIČKI DOKAZ.

a) Sintetički dokaz.

Dokaz u kome se polazi od nekog istinitog tvrđenja, i preko niza tvrđenja koja logički slijede iz njega dolazimo do tvrđenja teoreme, naziva se sintetički ili progresivni dokaz.

Primjer 1. Dokazati da za bilo koja dva nenegativna broja a i b važi nejednakost (broj je nenegativan ako je 0 ili veći od 0).

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$$

Sintetički dokaz (progresivni dokaz).

$(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \Rightarrow$

$(a+b)^2 \geq 4ab \Rightarrow a + b \geq 2\sqrt{a \cdot b} \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$.

Analitički dokaz (regresivni dokaz).

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b} \Rightarrow a + b \geq 2\sqrt{a \cdot b} \Rightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Rightarrow$

$a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow (a-b)^2 \geq 0.$

Sinteza je strog naučni metod dokazivanja. Ono što se dokaže sintezom nije potrebno dokazivati nekim drugim metodama. U primjeni sintetičkog dokaza problem se javlja u nalaženju polaznog istinitog tvrđenja od kog se polazi da bi se dokazalo formulisano tvrđenje.

b) Analitički dokaz.

Dokaz u kome se polazi od tvrđenja koje treba dokazati, i preko niza tvrđenja koja logički slijede iz njega dolazi se do istinitog tvrđenja, naziva se analitički ili regresivni dokaz. Iz primjera 1 uočavamo da smo u analitičkom dokazu pošli od nejednakosti koju treba dokazati, pa smo preko nejednakosti koje iz nje logički slijede (primjenom poznatih svojstava nejednakosti) došli do istinite nejednakosti $(a-b)^2 \geq 0$ (kvadrat binoma veći ili jednak od 0).

Primjenom analitičkog metoda dokazivanja mogu se javiti dva slučaja:
1) Tvrđenje do kog se dolazi nije istinito. U tom slučaju ni tvrđenje koje dokazujemo nije istinito, jer iz istinitog tvrđenja ne može se dobiti neistinito tvrđenje.
2) Dobijeno tvrđenje je istinito. U tom slučaju za tvrđenje koje dokazujemo ne možemo dati odgovor da li je istinito ili nije. Naime, istinito tvrđenje se može izvesti ne samo iz istinitog tvrđenja već i iz neistinitog tvrđenja.

Primjer 2. Jednakost $5=-5$ je neistinita, a jednakost $5^2=(-5)^2$ koja se iz nje dobija je istinita.

c) Analitičko-sintetički metod.

Dakle, ako u analizi dođemo do istinitog tvrđenja, onda treba pokušati dokaz sprovesti sintezom, polazeći od tog istinitog tvrđenja.

U praksi se sjedinjuje analitički i sintetički metod u takozvani analitičko-sintetički metod. Analizom otkrivamo polazno istinito tvrđenje, a sintezom sprovodimo dokaz.

Primjer 3. Dokazati analitičko-sintetičkom metodom nejednakost:

$$\sqrt{2+\sqrt{2}}<2.$$

Analiza: $\sqrt{2+\sqrt{2}}<2 \Rightarrow 2+\sqrt{2}<4 \Rightarrow \sqrt{2}<2 \Rightarrow 2<4$

Sinteza: $2<4 \Rightarrow \sqrt{2}<2 \Rightarrow 2+\sqrt{2}<4 \Rightarrow \sqrt{2+\sqrt{2}}<2$

Primjer 4. Dokazati analitičko-sintetičkom metodom nejednakost:

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \quad (a>0, b>0).$$

Analiza:

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \Rightarrow \frac{2ab}{\sqrt{ab}} \leq a+b \Rightarrow 2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \leq a+b \Rightarrow$$

$$a-2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+b \geq 0 \Rightarrow \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0. \ (\sqrt{a^2} = |a| = a, za\ a > 0)$$

Sinteza:

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow a-2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\ +b \geq 0 \Rightarrow 2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \leq a+b \Rightarrow$$

$$\frac{2ab}{\sqrt{ab}} \leq a+b \Rightarrow \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}\,.$$

Primjer 5. Dokazati analitičko-sintetičkom metodom nejednakost:

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \quad (a > 0, b > 0)$$

Analiza:

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Rightarrow \frac{(a+b)^2}{4} \leq \frac{a^2+b^2}{2} \Rightarrow (a+b)^2 \leq 2\cdot(a^2+b^2) \Rightarrow$$

$$a^2+2ab+b^2 \leq 2a^2+2b^2 \Rightarrow a^2-2ab+b^2 \geq 0 \Rightarrow (a-b)^2 \geq 0.$$

Sinteza:

$$(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2-2ab+b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2+2ab+b^2 \leq 2a^2+2b^2 \Rightarrow$$

$$(a+b)^2 \leq 2\cdot(a^2+b^2) \Rightarrow \frac{(a+b)^2}{4} \leq \frac{a^2+b^2}{2} \Rightarrow \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Aritmetičkom sredinom pozitivnih realnih brojeva a i b nazivamo broj:

$$A(a,b) = \frac{a+b}{2}$$

Geometrijskom sredinom pozitivnih realnih brojeva a i b nazivamo broj:

$$G(a,b) = \sqrt{ab}.$$

Harmonijskom sredinom pozitivnih realnih brojeva a i b nazivamo broj:

$$H(a,b) = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$$

Kvadratnom sredinom pozitivnih realnih brojeva a i b nazivamo broj:

$$K(a,b)=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Dokazali smo da za $0<b\leq a$ važi nejednakost (primjeri 1, 4 i 5):

$$b\leq H(a,b)\leq G(a,b)\leq A(a,b)\leq K(a,b)\leq a.$$

Primjer 6. Dokazati da za pozitivne realne brojeve a, b, c važi nejednakost:

$$(a+b)(b+c)(a+c)\geq 8abc.$$

Primjenjujući nejednakost A-G na parove (a, b), (b, c) i (a, c) dobijamo:

$$a+b\geq 2\cdot\sqrt{ab}\,,$$
$$b+c\geq 2\cdot\sqrt{bc}\,,$$
$$a+c\geq 2\cdot\sqrt{ac}\,.$$

Množenjem ovih nejednakosti slijedi

$$(a+b)(b+c)(a+c)\geq 8\sqrt{a^2b^2c^2}\,, tj.$$
$$(a+b)(b+c)(a+c)\geq 8\sqrt{abc}\,.$$

Znak jednakosti vrijedi samo ako je $a=b=c$.

Ova nejednakost se može dokazati primjenjujući nejednakost H-G na iste parove. Probajte sami. To bi bio drugi način da se dokaže ova nejednakost.

Primjer 7. Na dva načina dokazati da je $\sqrt{2017\cdot 2019}<2018$.

Prvi način: Primjenjujući nejednakost G-A na par (2017,2019) dobijamo:

$$\sqrt{2017\cdot 2019}<\frac{2017+2019}{2}=2018\,.$$

Drugi način: $\sqrt{2017\cdot 2019}\;=\sqrt{(2018-1)\cdot(2018+1)}\;=$

$\sqrt{2018^2-1}\;<\sqrt{2018^2}\;=2018.$

Primjer 8. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi za koje važi:

$$\frac{1}{a\sqrt{a}}+\frac{1}{b\sqrt{b}}+\frac{1}{c\sqrt{c}}=3.$$

Dokazati da važi:

$$ab+bc+ca+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq 6\sqrt{abc}\,.$$

Primjenjujući nejednakost A-G na parove

$$\left(ab,\frac{1}{c^2}\right),\left(bc,\frac{1}{a^2}\right)\text{ i }\left(ca,\frac{1}{b^2}\right)\text{ dobijamo:}$$

$$ab+\frac{1}{c^2}\geq\frac{2\sqrt{ab}}{c},$$

$$bc+\frac{1}{a^2}\geq\frac{2\sqrt{bc}}{a},$$

$$ca+\frac{1}{b^2}\geq\frac{2\sqrt{ca}}{b}.$$

Sabiranjem ovih nejednakosti slijedi:

$$ab+bc+ca+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq\frac{2\sqrt{ab}}{c}+\frac{2\sqrt{bc}}{a}+\frac{2\sqrt{ca}}{b}$$

$$=2\left(\frac{ab\sqrt{ab}+bc\sqrt{bc}+ac\sqrt{ac}}{abc}\right). \tag{1}$$

Koristeći uslov zadatka imamo:

$$\left(\frac{1}{a\sqrt{a}}+\frac{1}{b\sqrt{b}}+\frac{1}{c\sqrt{c}}\right)=3\iff\left(\frac{ab\sqrt{ab}+bc\sqrt{bc}+ac\sqrt{ac}}{abc\sqrt{abc}}\right)=3$$

$$\iff ab\sqrt{ab}+bc\sqrt{bc}+ac\sqrt{ac}=3abc\sqrt{abc}\,. \tag{2}$$

Kada (2) uvrstimo u (1) dobijamo:

$$ab+bc+ca+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq 6\sqrt{abc},$$

što je trebalo dokazati.

Zadaci za vježbu:

1. Dokazati da je: $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}<3\,.$
2. Dokazati nejednakost: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2\,,gdje\ je\ a,b\neq 0.$
3. Dokazati nejednakost: $a+b+c\geq\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$, gdje su a, b i c pozitivni realni brojevi.

ARITMETIČKE OPERACIJE U JEZIKU C++

Podsjetimo se kako se zapisuju aritmetičke operacije u programskom jeziku C++:

Operacija	Matematika	U algoritmima	C++	Primjer (C++)
Sabiranje	`a+b`	`a+b`	`a+b`	`7+2=9`
Oduzimanje	`a-b`	`a-b`	`a-b`	`7-2=5`
Množenje	`ab ili a·b`	`a*b`	`a*b`	`7*2=14`
Dijeljenje	`a:b`	`a/b`	`a/b`	`7/2=3.5`
Cjelobrojno dijeljenje	`a/b ili a div b`	`a div b`	`a/b`	`7/2=3`
Ostatak pri dijeljenju ili moduo	`a mod b`	`a%b`	`a%b`	`7%2=1`

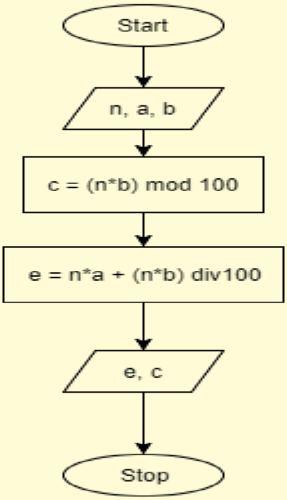
Ne zaboravite da ako su i djeljenik i djelilac cijeli brojevi tipa int, tada je i količnik cio broj tipa int. Uradimo nekoliko zadataka koristeći aritmetičke operacije.

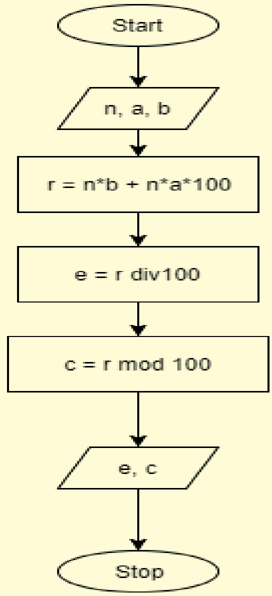
Zadatak 1 Proizvod košta a eura i b centi (a i b nenegativni cijeli brojevi, b<100). Koliko košta n takvih proizvoda? Napisati program koji učitava brojeve n, a i b i štampa dva broja: koliko eura i koliko centi treba platiti za n proizvoda.

Primjer:

Ulaz	Izlaz
`5 1 15`	`5 75`
`5 1 21`	`6 5`

Rješenje: Rješenje sa slike lijevo prvo odredi iznos centi, pa zatim eura, vodeći računa da se vrši odgovarajući prenos centi na eure. Drugo rješenje, sa slike desno, prvo pretvori cijenu u cente, pa zatim taj iznos pretvara nazad u eure i cente.





C++ rješenje

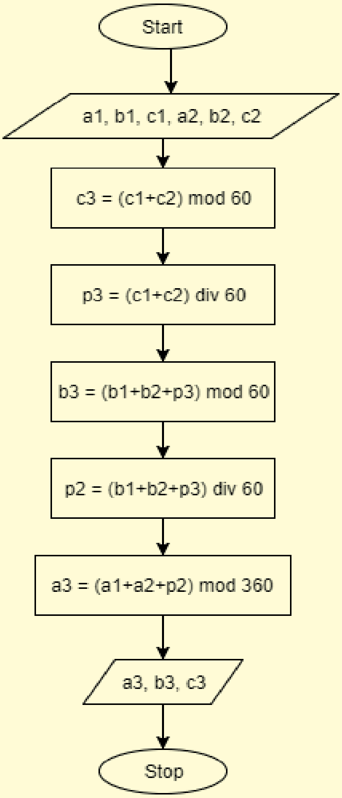
```
#include <iostream>

using namespace std;

int main()
{
   int n, a, b, r, e, c;
   cin >> n >> a >> b;
   r = n*a*100 + n*b; // ukupno u centima
   e = r / 100; // euro
   c = r % 100; // centi
   cout << e << " " << c << endl;
   return 0;
}
```

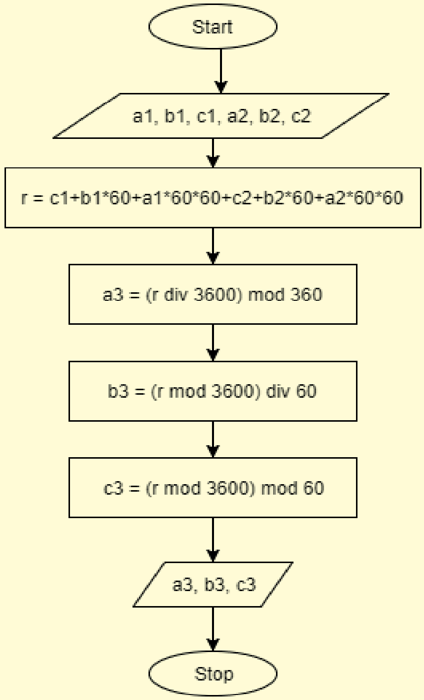
Zadatak 2: Data su dva ugla izražena stepenima, minutima i sekundama. Napisati program koji učitava 6 nenegativnih cijelih brojeva a1, b1, c1, a2, b2, c2 ($0 \leq b1, c1, b2, c2 \leq 59$), gdje prva tri broja predstavljaju prvi ugao izražen stepenima (a1), minutima (b1) i sekundama (c1), a preostala tri broja su drugi ugao izražen stepenima (a2), minutima (b2) i sekundama (c2), i štampa tri broja koji predstavljaju zbir dva data ugla.

Primjer:

Ulaz	**Izlaz**	**Objašnjenje**
`5 1 15 25 45 46`	`30 47 1`	Prvi ugao je 5º 1’ 15”, a drugi je 25º 45’ 46”, pa je njihov zbir 30º 47’ 1”

Rješenje: Rješenje sa slike lijevo prvo sabira sekunde, pa minute i na kraju stepene, vodeći računa da se vrši odgovarajući prenos. Drugo rješenje, sa slike desno, prvo pretvori oba ugla u sekunde, pa rezultat pretvara redom u stepene, minute i sekunde.





C++ rješenje

```
#include <iostream>
using namespace std;

int main ()
```

```
{
   int a1, b1, c1, a2, b2, c2, a3, b3, c3, r;
   cin >> a1 >> b1 >> c1 >> a2 >> b2 >> c2;
   r = a1*3600 + b1*60 + c1 + a2*3600 + b2*60 + c2; //zbir u sekundama
   a3= r / 3600;
   b3 = (r % 3600) / 60;
   c3 = (r % 3600) % 60;
   cout << a3 << " " << b3 << " " << c3 << endl;
   return 0;
}
```

Zadaci za vježbu:

Zadatak 1. Napisati program koji na ekranu štampa poruku „Dijagonala“.

Zadatak 2. Napisati program koji učitava prirodne brojeve a i b, i štampa njihov zbir i njihov proizvod.

Zadatak 3. Napisati program koji učitava cijele brojeve a i b, i štampa broj x koji je rješenje jednačine x + a = b. Na primjer, ako učitamo brojeve 3 i 5, treba štampati broj 2.

Zadatak 4. Napisati program koji učitava prirodan broj n (n > 100) i štampa količnik i ostatak pri djeljenju broja n sa brojem 100. Na primjer, ako je učitan broj 73895, treba štampati 738 i 95.

Zadatak 5. Napisati program koji učitava četvorocifren prirodan broj n = abcd i štampa broj cbad. Na primjer, za učitan broj 1483, štampati broj 8413.

Zadatak 6. Napisati program koji učitava šestocifreni prirodan broj n = abcdef i štampa broj m koji se dobija kada se od broja acf oduzme broj bde.

Zadatak 7. Napisati program koji učitava šestocifreni prirodan broj n i štampa razliku brojeva x i y, gdje je x broj koji se dobija brisanjem svih parnih cifara broja n, a y je broj koji se dobija brisanjem svih neparnih cifara broja n.

Primjer:

Ulaz	Izlaz	Napomena
123222	-2209	-2209 = 13 - 2222
242424	-242424	-242424 = 0 - 242424
135135	135135	135135 = 135135 - 0
274776	531	531 = 777 - 246

ZADACI ZA VJEŽBU

VI razred

I nivo

1. Nacrtati proizvoljnu duž i podijeliti je na 8 jednakih djelova.
2. Konstruisati (bez upotrebe uglomjera) ugao čija je mjera: a) 45°, b) $22^\circ 30'$, c) $11^\circ 15'$, d) 135°, e) 225°, f) 315°.
3. Na kružnici $k(O, 5\ cm)$ data je tačka P. Koliko ima tetiva ove kružnice čija je jedna krajnja tačka P i čija je dužina $3\ cm$? Konstruisati ih.
4. Izračunati: a) $(\frac{7}{8}+\frac{1}{2})\cdot 16$; b) $\frac{2}{5}\cdot 3+\frac{5}{6}\cdot 4$; c) $3\frac{2}{3}\cdot 4-9\frac{1}{6}$; d) $5\frac{7}{12}\cdot 6-2\cdot\left(1\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\right)$.
5. Izračunati: a) $\frac{2}{7}:\frac{3}{5}$; b) $\frac{7}{10}:\frac{6}{15}$; c) $\left(2\frac{7}{15}-1\frac{7}{10}\right):\frac{7}{6}$; d) $\frac{3}{4}:\left(\frac{3}{7}+\frac{2}{3}\right)$.
6. Izračunati: a) $5\cdot 0{,}5$; b) $0{,}77\cdot 8$; c) $0{,}6\cdot 0{,}9$; d) $1{,}7\cdot 0{,}4$; e) $3{,}4\cdot 5{,}88$; f) $0{,}77:9$; g) $6{,}09:0{,}0609$; h) $0{,}0058:0{,}25$.
7. Odrediti vrijednost sledećih dvojnih razlomaka: a) $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{17}}$; b) $\frac{\frac{11}{15}}{\frac{3}{10}}$; c) $\frac{5}{\frac{30}{13}}$.
8. Izračunati aritmetičku sredinu brojeva: a) $1\frac{1}{5}$ i $2{,}3$; b) $0{,}3$; $\frac{1}{3}$ i $1\frac{4}{5}$; c) $10\frac{7}{9}$ i $\frac{5}{12}$; d) $\frac{1}{2}$, $3\frac{3}{7}$, $\frac{3}{4}$, i $1{,}75$.
9. Biciklista je prvog sata prešao $13{,}1\ km$, drugog $15{,}3\ km$, a trećeg $12{,}4\ km$. Kojom se prosječnom brzinom kretao biciklista?
10. Riješiti jednačine: a) $\frac{7}{20}\cdot x=2.1$; b) $0.5\cdot x+\frac{3}{5}=3.76$; c) $x:\frac{6}{7}=2\frac{8}{27}$; d) $0.567:x=31.5$.
11. Riješiti nejednačine: a) $\frac{2}{3}\cdot x<\frac{13}{8}$; b) $x\cdot 31.5\geq 56.7$; c) $x\cdot 10{,}5-\frac{3}{5}\leq 1.5$; d) $2.8\cdot(x+1)>4\frac{2}{3}$.
12. Izračunati razmjere brojeva: a) 12 i 3; b) 18 i 27; c) $5{,}5$ i 110; d) $3{,}5$ i $0{,}21$; e) $\frac{11}{13}$ i $\frac{2}{7}$; f) $2\frac{1}{3}$ i $5\frac{1}{7}$.
13. Izračunati: a) 20% od 100; b) 25% od 80; c) 115% od 123; d) 43% od 12.5.

II nivo

1. a) Od broja 10 oduzeti trostruki zbir brojeva $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$ i $\frac{1}{2}$.
   b) Razliku brojeva $6\frac{4}{5}$ i $2\frac{7}{15}$ uvećati 3 puta.
   c) Koji je broj 6 puta veći od broja $2\frac{3}{4}$?

2. a) Koji je broj 4 puta manji od broja $18\frac{4}{5}$?

   b) Zbir brojeva $3\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{4}$ podijeliti sa 5, a zatim odrediti $\frac{1}{3}$ dobijenog izraza.

   c) Sabrati zbir, razliku, proizvod i količnik brojeva $8\frac{1}{3}$ i 5.

3. Odrediti zbir svih recipročnih vrijednosti prirodnih brojeva koji dijele broj 24.
4. U jednom sudu ima $3\frac{5}{6}l$ vode, a u drugom $6\frac{2}{3}l$. Koliko vode treba uzeti iz drugog i naliti u prvi, da bi u oba suda bile jednake količine?
5. Za koju vrijednost parametra m izraz $\frac{4}{9}\cdot\left(16\frac{2}{7}-\frac{5}{4}m\right)+0{,}35:0{,}25$ uzima vrijednost $8\frac{2}{5}$?
6. Riješiti jednačine:

   a) $\frac{1}{10}\left\{\frac{1}{9}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{x+2}{3}+8\right)+16\right]+8\right\}=1,$ b) $\frac{5}{6-\frac{5}{6-\frac{5}{6-x}}}=1.$

7. Umjesto da dati broj pomnoži sa $\frac{8}{19}$, učenik je taj broj podijelio sa $\frac{8}{19}$. Njegov odgovor je bio za 297 veći od tačnog odgovora. Odrediti taj broj.
8. Za koje je vrijednosti promjenljive a:

   a) proizvod $1\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{4}{9}$ manji od razlike brojeva $1\frac{3}{4}$ i 0,6;

   b) zbir $\frac{5}{6}+\frac{3}{4}a$ veći od proizvoda brojeva 2,2 i 1,8;

   c) količnik izraza $(3{,}5a-\frac{1}{3})$ i 0,75 za 1,2 veći od količnika brojeva 0,5 i $1\frac{2}{3}$?

9. U kom su odnosu površine i obimi dvije pravougaone sobe ako su dimenzije jedne 3,4 m i 4,6 m, a druge 4,2 m i 4,4 m?
10. Ako je 150% nekog broja 300, koliko iznosi 30% tog broja?
11. Poslije poskupljenja od 20%, pa pojeftinjenja od 20%, kako se promijenila cijena artikla? Da li je on sada skuplji, jeftiniji ili mu je cijena ista kao prvobitna?

Kristina Radović, JU OŠ „Radojica Perović", Podgorica

VII razred

I nivo

1) Izračunati vrijednost izraza: a) $-\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cdot 1\frac{1}{5}$; b) $-\frac{2}{3}\cdot\left(-1\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\right):\left(-1\frac{3}{8}\right)$;

   $c)-5-0{,}5\cdot(5-5:0{,}5)$; $d)\ 24:(1{,}2\cdot 0{,}5-3)$.

2) Riješiti jednačine: a) $-4\frac{2}{5}-\frac{2}{5}x=1$; b) $2\cdot\left(x-\frac{3}{4}\right)=-0{,}5$;

   c) $(1{,}2x+7)-3{,}75=-2\frac{3}{4}$.

3) a) Riješiti nejednačinu i skup rješenja prikazati na koordinatnoj osi:
$-\frac{1}{2}x - 3{,}5 > -2{,}5$;

b) Ako se od $\frac{2}{3}$ nekog broja oduzme proizvod brojeva $\frac{1}{2}$ i $-\frac{4}{3}$, dobiće se broj koji nije veći od $-1\frac{1}{3}$. Odrediti takve brojeve.

4) Odrediti broj koji umanjen za svoju trećinu daje $-\frac{5}{6}$.

5) Unutrašnji uglovi četvorougla ABCD su takvi da je: $\alpha = x$, $\beta = 2x$, $\gamma = 4x$, $\delta = 8x$. Izračunati unutrašnje uglove tog četvorougla.

6) Zbir dva unutrašnja ugla paralelograma je $138°$. Izračunati veličine unutrašnjih uglova tog paralelograma.

7) Odrediti unutrašnje uglove jednakokrakog trapeza ako je jedan od njih tri puta veći od drugog.

8) Izračunati uglove jednakokrakog trapeza $ABCD$ ako je ugao između stranice AD i visine povučene iz tjemena D jednak $20°$.

9) Jednakokraki trougao ABC ima zajedničku stranicu AB sa jednakostraničnim trouglom ABD. Ako je $\sphericalangle BAC = 82°$, odrediti uglove četvorougla $ADBC$.

10) Konstruisati romb $ABCD$ ako je AB = 5 cm i ∢B =120°.

11) Konstruisati trapez $ABCD$ ako je osnovica $AB = 5cm$, $\propto = 60°$, $\beta = 45°$, a krak $AD = 2{,}5cm$.

12) Konstruisati kvadrat čija je dijagonala 4,3 cm.

II nivo

1) Izračunati : $-\frac{1}{7} \cdot a + \frac{1}{b}$,

ako je $a = 8\frac{1}{3} + \left(\frac{5}{6} + 1{,}5 \cdot \left(-1\frac{1}{3}\right)\right) \cdot (-2 + 0{,}5 \cdot 8)$ i $b = -(-0{,}5 \cdot 10)$.

2) Riješiti nejednačine:

a) $(4{,}6 - 2x) : 4 - 1\frac{1}{2} \leq -2$;

b) $-2 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{5x}{7} - 5\right) > -3$;

c) $\left(-0{,}9x - \frac{1}{10}\right) : (-0{,}9) < 0$.

3) Odrediti tri broja za koja važi da je zbir prvog i drugog $-9{,}5$; drugog i trećeg $-4{,}5$ i prvog i trećeg -25.

4) Milica i Bojana imale su ukupno 90€. Kada je Milica potrošila $\frac{3}{8}$ svoje sume, a Bojana $\frac{3}{10}$ svoje sume ukupno su potrošile 30 €. Koliko je novca imala Milica, a koliko Bojana?

5) U četvorouglu $ABCD$ ugao α je dva puta veći od ugla β, ugao γ je za $14°$ veći od ugla β, a ugao δ je za $20°$ manji od ugla α. Odrediti uglove tog četvorougla.
6) Izračunati unutrašnje uglove paralelograma ako je spoljašnji ugao jednak $\frac{5}{4}$ susjednog unutrašnjeg ugla.
7) Dijagonala AC romba ABCD obrazuje sa stranicom AB ugao od $30°$. Izračunati dužinu dijagonale BD, ako je obim romba 32 cm.
8) Izračunati uglove deltoida ABCD ako je BD osa simetrije, $\beta = \frac{1}{4}\alpha$ i $\delta = \alpha + 30°$.
9) Izračunati uglove romba $ABCD$ ako simetrala $\sphericalangle CAB$ siječe dijagonalu BD pod uglom od $105°$.
10) Konstruisati romb visine 4 cm, ako kraća dijagonala ima dužinu 5 cm.
11) Iz tjemena A i C pravougaonika ABCD konstruisane su normale AP i CN na dijagonalu BD. Dokazati da je četvorougao ANCP paralelogram.
12) Koliko ima četvorocifrenih brojeva koji su djeljivi sa 5 i u čijem zapisu nema ponavljanja cifara?
13) U odjeljenju ima 26 učenika. Na koliko načina mogu biti izabrani predsjednik, sekretar i blagajnik odjeljenjske zajednice?

Svetlana Džabasan, JU OŠ „Maksim Gorki", Podgorica

VIII razred

I nivo

1) Nacrtati pravougli koordinatni sistem i u njemu označiti tačke sa koordinatama $M(1,1)$, $N(0,3)$, $P(3,5;2)$, $Q(-2,\frac{1}{2})$ i $R(-5,0)$.
2) Date su tačke $K(0,-3)$, $L(-2,-5)$ i $M(2,3\frac{1}{2})$.
   a) Ne predstavljajući ih u koordinatnom sistemu odrediti kojim kvadrantima pripadaju tačke L i M.
   b) Odrediti tačku K_1 simetričnu tački K u odnosu na y-osu;
   c) Odrediti tačku L_1 simetričnu tački L u odnosu na x-osu;
   d) Odrediti tačku M_1 simetričnu tački M u odnosu na koordinatni početak.
3) U koordinatnom sistemu predstaviti tačke, pa izračunati obim i površinu ΔABC određenog tim tačkama: a) $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(0,3)$; b) $A(-3,0)$, $B(3,0)$, $C(0,-4)$.
4) Date su tačke A (0,-1) i B (0,4). Predstaviti date tačke u koordinatnom sistemu, a zatim odrediti obim i površinu kruga čiji je prečnik AB.

5) Nacrtati grafik funkcije $y = -2x$, a zatim odrediti da li tačke A(1,2) i B(-2,4) pripadaju grafiku te funkcije.
6) Izračunati dužinu dijagonale BD paralelograma ABCD, ako su mu stranice AB = 75 cm, BC = 56 cm, a visina koja odgovara stranici BC ima dužinu 6 dm.
7) Odrediti veličinu centralnog ugla α i periferijskog ugla β ako je:

a) $\alpha + \beta = 102^\circ$; b) $\alpha + \beta = 160^\circ$.

8) U kružnom prstenu tetiva većeg kruga dodiruje manji krug. Izračunati površinu kružnog prstena ako je dužina tetive 2 cm.
9) Iz kruga prečnika $8\sqrt{3}$ izrezan je kružni isječak površine 4396 cm^2. Koliki je centralni ugao isječka?
10) Površina četvrtine kruga je 16π cm^2. Izračunati obim kruga.
11) Izračunati površinu kružnog isječka nad kružnim lukom kome odgovara periferijski ugao od 30°, ako je poluprečnik kruga 9 cm.
12) Izračunati obim: a) polukruga ako je njegova površina 8π cm^2;
b) kružnog isječka ako je prečnik kruga 4 cm, a veličina centralnog ugla koji mu odgovara $22^\circ 30'$.

II nivo

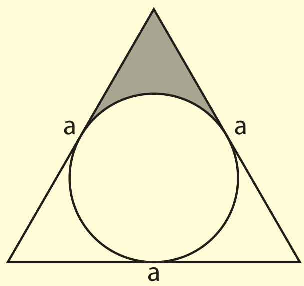
1) Nacrtati grafik koji prikazuje zavisnost obima romba y od njegove stranice x. Odrediti:

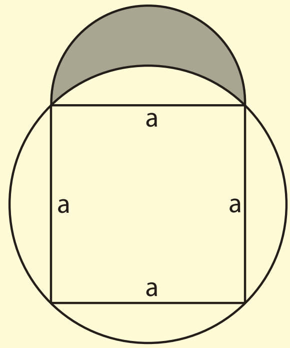
a) x ako je $y = \frac{1}{2}$; b) y ako je $x = 2{,}75$.

2) Pješak se kreće ravnomjernom brzinom, tako da za sat vremena pređe 3,5 km. Nacrtati grafik koji predstavlja kretanje ovog pješaka za tri sata pješačenja. Zatim, koristeći grafik odrediti:
a) za koje vrijeme pješak pređe 5 km; b) koliki dio puta ovaj pješak prepješači za dva i po sata?
3) Jedan unutrašnji ugao romba je veličine 30°. Ako je obim tog romba 88 cm, kolika je njegova površina?
4) Stranica romba je dužine 1 dm. Ako mu je jedan unutrašnji ugao 135°, kolika je površina tog romba?
5) Pravougli trapez ima veću osnovicu AB = 16 cm i manji krak BC, a njegove dijagonale su dužina 13 cm i 20 cm. Izračunati površinu tog trapeza.
6) Izračunati površinu jednakokrakog trapeza koji ima dijagonalu dužine 34 cm i srednju liniju dužine 3 dm.
7) Veličine unutrašnjih uglova na većoj osnovici trapeza su 30° i 60°. Dužina manje osnovice je $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ cm cm, a većeg kraka 10 cm. Izračunati površinu trapeza.
8) Dat je jednakostranični trougao ABC površine $9\sqrt{3}$ cm^2. Neka su tačke B i D sa raznih strana prave koja sadrži duž AC, tako da je četvorougao ABCD deltoid sa

pravim uglom kod tjemena D. Izračunati dužinu veće dijagonale deltoida. (Približno na dvije decimale.)

9) Odrediti obim obojenog dijela figure na slikama:





$a)\ a = 2\sqrt{3}cm$ b) $a = 2cm$

10) Od kartona kružnog oblika površine 78,5 cm^2 izrezan je upisani kvadrat u dati krug.
   a) Kolika je površina kartona koji je ostao nakon rezanja?
   b) Koliki je obim upisane kružnice izrezanog kvadrata?

11) Dužina dijagonale kvadrata je $4\sqrt{3}$ cm. Kolika je površina kružnog prstena kojeg obrazuju upisani i opisani krug za dati kvadrat?

12) U jednom parku ograđen je dio oblika paralelograma i zasađen cvijećem. Luku zanima kolika je ukupna dužina ograde oko cvijećnjaka, a Maša bi željela da zna kolika su rastojanja naspramnih tjemena. Znaju da je površina cvijećnjaka 168 m^2 i da su (najmanja) širina i (najmanja) dužina 11,2 m i 12 m.

Ivana Femić Bogojević, Danijela Jovanović,
JU OŠ „Milorad Musa Burzan“, Podgorica

IX razred

I nivo

1) Omotač valjka razvijenog u ravni je pravougaonik čije se dijagonale sijeku pod uglom od 120°. Ako dijagonala tog pravougaonika iznosi 6 cm, izračunati površinu valjka.
2) Obim pravougaonika je 32 cm, a razlika susjednih stranica je 7 cm. Od pravougaonika je napravljen omotač valjka. Izračunati zapreminu valjka čija je visina jednaka kraćoj stranici pravougaonika.
3) Osni presjek valjka je kvadrat površine 100 cm^2. Izračunati površinu i zapreminu valjka.
4) Izvodnica kupe je tri puta duža od prečnika osnove. Koliko puta je površina omotača kupe veća od površine osnove?

5) Visina i izvodnica prave kupe odnose se kao 4:5 a njena zapremina je 96 π. Naći površinu kupe.
6) Površina prave kupe iznosi 144 cm^2, a površina omotača je tri puta veća od površine osnove te kupe. Izračunati njenu zapreminu.
7) Tri metalne kugle poluprečnika 6 cm, 8 cm i 10 cm pretopljene su u jednu loptu. Izračunati prečnik tako dobijene lopte.
8) Prečnik lopte od plastelina ima dužinu 8 cm. Ako se od te lopte napravi kupa čiji je prečnik osnove jednak prečniku lopte, kolika je visina te kupe?
9) Lopta poluprečnika $2\sqrt{3}$ i jedakostranična kupa ($2r = s$) imaju jednake površine. Izračunati zapreminu kupe.
10) Rezultati kontrolne vježbe iz matematike dati su sledećom tabelom:

Ocjena	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
br. učenika	**6**	**7**	**10**	**5**	**2**

Predstaviti rezultate iz tabele pomoću kružnog dijagrama.

II nivo

1. Drveni valjak poluprečnika 8 cm i površine osnog presjeka 512 cm^2 presječen je sa jednom ravni koja sadrži osu valjka. Dobijena dva tijela treba obojiti. Koliko je boje potrebno za to ako je za bojenje 2 m^2 potrebno 1 kg boje?
2. Data je pravilna četvorostrana prizma čija je dijagonala 24 cm i koja sa ravni osnove zaklapa ugao od 60°. U nju je upisan i oko nje opisan valjak. Izračunati odnos zapremina ta dva valjka.
3. Prave: $3y-2x-2=0$ i $y+2x-6=0$ sa x osom grade trougao. Izračunati površinu i zapreminu tijela koje nastaje rotacijom dobijenog trougla oko x-ose.
4. Kružni isječak poluprečnika 6 cm kome odgovara centralni ugao od 240° savijen je u omotač prave kupe. Izračunati površinu odgovarajuće kupe.
5. Posuda oblika jednakostraničnog valjka kome je prečnik 10 cm , ispunjena je vodom do $\frac{11}{12}$ dubine. Koliki je poluprečnk najveće lopte koja se može potopiti u vodu, a da se voda iz posude ne izlije?
6. Lopta prečnika 24 cm je presječena sa dvije paralelne ravni. Odrediti međusobno rastojanje ovih ravni, ako su površine dobijenih presjeka lopte i ravni 140π cm^2 i 135π cm^2.
7. Od 100 učenika svaki se učlanio u jednu od sekcija: literarnu, prirodnjačku, matematičku, sportsku, likovnu ili muzičku. Redom u u sekcijama učestvuje: 10, 5, 20, 50, 5, 10 učenika. Prikazati podatke:
   a) tabelom; b) pomoću kružnog dijagrama.

8. Valjak i kupa imaju zajedničku osnovu, a vrh kupe se poklapa sa centrom osnove valjka. Odnos izvodnice kupe i izvodnice valjka je 5:4. Odrediti razmjeru površina valjka i kupe.
9. Izračunati zapreminu tijela koje se dobija obrtanjem jednakokrakog trapeza čije su osnovice 18 cm i 12 cm i ugao na dužoj osnovici 60° oko:
   a) kraće osnovice; b) duže osnovice.
10. Od drvene oblice (kružnog presjeka) dužine 6 m i prečnika 24 cm treba isjeći gredu iste dužine i najvećeg (kvadratnog) presjeka. Koliko približno materijala otpada izraženo u procentima?

Branka Vujadinović i Nikola Milačić,
JU OŠ „Sutjeska“, Podgorica

ODABRANI ZADACI

VI razred

1. Kada je učenik pročitao polovinu knjige i još 20 strana, ostalo mu je da pročita još trećinu knjige. Koliko stranica ima knjiga?
2. Neki posao Mladen bi završio za 12 dana, Damir za 15, a Vesko za 20 dana. Radili su zajedno 4 dana, a onda je Damir ostatak posla sam završio. Koliko dana je ukupno radio Damir?
3. Dvije trećine od 0,4 najprije povećati za 50%, pa dobijeni rezultat umanjiti za 50%. Koji rezultat se dobija?
4. Dat je kvadrat ABCD stranice 5 cm. Konstruisati tačku M koja je jednako udaljena od tačaka A i B, a od tačke C je udaljena 3 cm. Koliko rješenja ima zadatak?

VII razred

1. Seljak je putovao u grad i kada je prešao trećinu puta utvrdio je da je pređeni dio puta za 12 km kraći od preostalog dijela puta. Koliko je dug čitav put?
2. Konstruisati ΔABC ako je AC = 6 cm, visina $h_c = 4$ cm i težišna duž $t_c = 5$ cm.
3. Dat je jednakokraki trougao ABC i na osnovici AB tačka M. Konstruisan je paralelogram MBCD. Dokazati da je $\measuredangle DAM = \measuredangle AMC$.
4. Dat je trougao ABC. Date su tačke P, Q i R koje su redom sredine stranica AB, BC i AC, kao i tačka D koja je podnožje visine iz tjemena C na stranicu AB. Dokazati da je četvorougao DPQR jednakokraki trapez.

VIII razred

1. Letjelo je jato ždralova, a sa zemlje ih je posmatrao golub, koji je rekao: „Koliko ih je! Sigurno ih je 100“! Jato je odgovorilo:“Nema nas 100. Da nas je još ovoliko koliko nas ima i još pola, i od te polovine pola, i ti s nama, onda bi nas bilo 100“. Koliko je ždralova bilo u jatu?
2. Hipotenuza pravouglog trougla je 20 cm, a jedan od oštrih uglova jednak je četvrtini pravog ugla. Izračunati površinu tog pravouglog trougla.
3. Dat je trapez ABCD kod koga je dijagonala AC normalna na krak BC, a dijagonala BD normalna na krak AD. Dokazati da je trapez ABCD jednakokraki.
4. Dokazati da za poluprečnik upisane kružnice u pravouglom trouglu sa stranicama a, b i c ($c > a$ i $c > b$) važi: $r = \frac{a+b-c}{2}$.

IX razred

1. Dvanaest vekni hljeba treba podijeliti na 12 osoba. Svaki muškarac dobija 2 hljeba, svaka žena pola vekne hljeba, a svako dijete $\frac{1}{4}$ vekne. Koliko je bilo muškaraca, koliko žena, a koliko djece?
2. Ako se na valjak čija je površina omotača $338\,\pi$ cm^2 stavi još jedan takav valjak, dobija se ravnostrani valjak. Izračunati zapreminu tako dobijenog valjka.
3. Kupa je presječena sa ravni koja prolazi kroz vrh i odsijeca šestinu kružne linije osnove, čiji je obim 16π cm. Ako je visina kupe 11 cm, izračunati površinu presjeka te ravni i kupe.
4. Poluprečnik lopte je vrijednost f(1) funkcije date formulom $f(x + \frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2}$. Izračunati površinu te lopte.

KONKURSNI ZADACI

VI razred

1) Goca i Nina imaju jednak broj jabuka. Goca svoje jabuke prodaje po cijeni 3 jabuke za 1 €, a Nina 2 jabuke za 1€. Ako sastave jabuke i prodaju ih po cijeni 5 jabuka za 2 €, onda će zaraditi 4€ manje nego da jabuke prodaju pojedinačno. Koliko su jabuka imale Goca i Nina, ako i pri pojedinačnoj i pri zajedničkoj prodaji ne ostane nijedna neprodata jabuka?

2. Uporediti razlomke: $\frac{399}{799}$ i $\frac{3999}{7999}$

VII razred

1. Koliko iznosi zbir prvih 450 decimala u decimalnom zapisu razlomka $\frac{11}{700}$?
2. Zadat je jednakokraki trougao ΔABC (AB = AC), tako da je $\angle BAC > 50^\circ$. Na stranici BC odabrana je tačka M tako da je $\angle BAM = 50^\circ$, a na stranici AC tačka N tako da je AM=AN. Kolika je veličina ugla $\angle CMN$?

VIII razred

1. Koliko uzastopnih prirodnih brojeva treba sabrati da bi se dobio broj 2019? Odrediti sva moguća rješenja.
2. Neka je dat jednakostranični trougao ABC i proizvoljna tačka M koja pripada tom trouglu. Dokazati da je zbir rastojanja tačke M do stranica trougla ABC jednak visini tog trougla.

IX razred

1. Mnogougao sa m stranica ima 1999 dijagonala više od mnogougla sa n stranica. Odrediti m i n.
2. Tjemena A, B i C jednakostraničnog ΔABC, čija je stranica 4 cm, udaljena su od ravni α redom 1cm, 2cm i 3cm. Ako su A', B' i C' normalne projekcije tačaka A, B i C na ravan α, odrediti površinu trougla $A'B'C'$.

Tanja Ivanović, Jelena Blečić, Svetlana Mugoša, Dejana Drakić, JU OŠ "Maksim Gorki"

RJEŠENJE KONKURSNIH ZADATAKA IZ TREĆEG BROJA

VI razred

1. U prodavnici ima 300 kg čokoladnih, gumenih i šećernih bombona. Kada se proda $\frac{1}{2}$ čokoladnih, $\frac{2}{3}$ gumenih i $\frac{4}{5}$ šećernih bombona, u radnji ostaju jednake količine. Koliko je bilo od svake vrste bombona?

2. Tri brata Ljubo, Bane i Duško treba da podijele izvjesnu količinu novca. Prvi je naišao Ljubo, uzeo svoju trećinu novca i otišao. Zatim je naišao Bane, i misleći da je on prvi, uzeo trećinu preostalog novca i otišao. Poslednji je naišao Duško i postupio kao i ostala braća – uzeo trećinu preostalog novca i otišao. Koliko je novca bilo ako je poslije Duškovog odlaska na stolu ostalo 592 eura?

Rješenja:

VI-1: Neka je u radnji ostalo po x od svih bombona. Znači da je bilo $2x$ čokoladnih, $3x$ gumenih i $5x$ šećernih bombona. Dobijamo da je $2x + 3x + 5x = 300$, tj. $x = 30$. Dakle, u prodavnici je bilo $60\ kg$ čokoladnih, $90\ kg$ gumenih i $150\ kg$ šećernih bombona.

VI-2: Kako je Duško uzeo trećinu preostalog novca, to je 592 eura upravo $\frac{2}{3}$ preostalog novca. Znači, na stolu je prije njegovog dolaska bilo $(592:2)\cdot 3 = 888$ eura. Slično, prije Banetovog dolaska je bilo $(888:2)\cdot 3 = 1332$ eura, a prije Ljubovog dolaska je bilo $(1332:2)\cdot 3 = 1998$ eura.

VII razred

1. Dokazati da je: $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{2005\cdot 2007}<\frac{1}{2}$.

2. Konstruisati ΔABC ako je $|AB|=5cm$, $|BA'|=1,5cm$ i $|BB'|=4cm$, gdje su A' i B' podnožja visina trougla konstruisanih iz tjemena A i B.

Rješenja:

VII-1: Primijetimo da je $\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{1\cdot 3}\cdot\frac{2}{2}=\frac{2}{1\cdot 3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3-1}{1\cdot 3}\cdot\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}$.

Isto važi i za druge razlomke: $\frac{1}{3\cdot 5}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5\cdot 7}=\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)\cdot\frac{1}{2}$...

Dakle, izraz $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{2005\cdot 2007}$ transformišemo:

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)\cdot\frac{1}{2}+\ldots+\left(\frac{1}{2005}-\frac{1}{2007}\right)\cdot\frac{1}{2}=$$

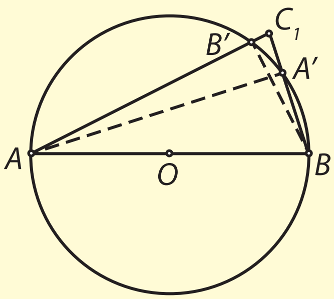
$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\ldots-\frac{1}{2007}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2007}\right).$$

Pošto je $1-\frac{1}{2007}<1$, $\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2007}\right)<1\cdot\frac{1}{2}$, onda je

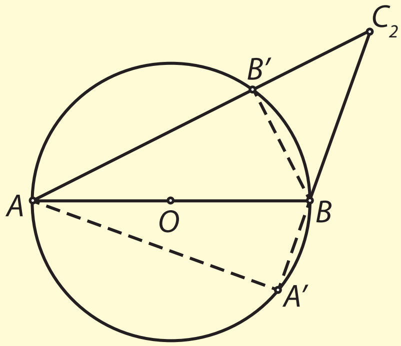
$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{2005\cdot 2007}<\frac{1}{2}.$$

VII-2: Pravougli trouglovi $AA'B$ i $BB'A$ imaju zajedničku hipotenuzu AB, pa tačke A, B, A' i B' pripadaju krugu čiji je centar središte duži AB, a poluprečnik $\frac{|AB|}{2}$. Tjeme C je tačka presjeka AB' i BA' (Slika 1 i Slika 2), tj. postoje dva trougla ABC_1

i ABC_2: jedan kad su tačke A' i B' sa iste, a drugi kad su tačke A' i B' sa raznih strana prave AB.



Slika 1



Slika 2

VIII razred

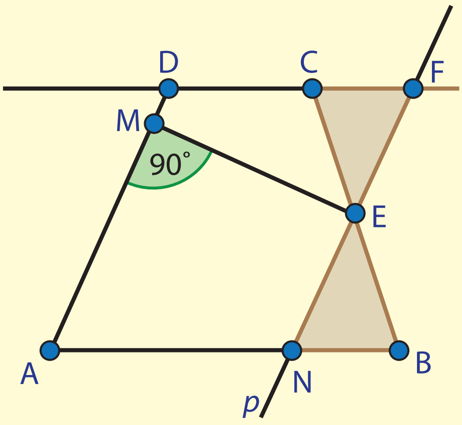
1. Da li postoji trocifren broj koji je jednak proizvodu svojih cifara?

2. Dokazati da je površina trapeza jednaka proizvodu kraka i rastojanja tog kraka od središta drugog kraka.

Rješenja:

VIII-1: Neka postoji traženi broj $\overline{abc}$ takav da je $\overline{abc} = a \cdot b \cdot c$.
Kako je a, b, c $\leq$ 9, tada: 100a $\leq$ 100a + 10b + c = abc $\leq$ 81a, što nije moguće.
Dakle, takav broj ne postoji.

VIII-2: Neka je u trapezu ABCD tačka E središte kraka BC. Neka je EM rastojanje tačke E od kraka AD. Kroz tačku E konstruišemo pravu p koja je paralelna sa pravom koja sadrži krak AD trapeza. Prava p siječe prave koje sadrže osnovice AB i CD trapeza ABCD redom u tačkama N i F.



Kako su trouglovi NBE i EFC podudarni, tada je površina trapeza ABCD jednaka površini paralelograma ANFD. Dakle, važi: $P_{ABCD} = P_{ANFD}$ = AD · EM, što je i trebalo dokazati.

IX razred

1) Kvadrat stranice *a* predstavlja mrežu trostrane piramide. Izračunati zapreminu te piramide u funkciji *a*.

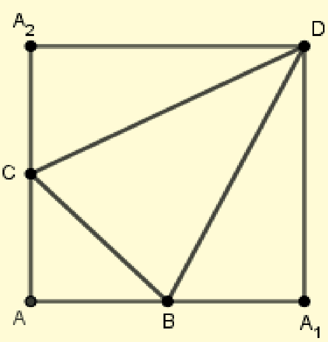
2) Automobil je prevalio rastojanje od grada A do grada B za 5 sati, a u obrnutom smjeru od grada B do grada A za 4 sata. Pri tom se uzbrdo kretao brzinom 60 *km/h*, po ravnom putu brzinom 72 *km/h* i nizbrdo brzinom 90 *km/h*. Koliko je rastojanje od grada A do grada B?

Rješenja:

IX-1: Kvadrat stranice *a* moguće je pretvoriti u mrežu trostrane piramide(vidi sliku) samo ako je $AB = BA_1 = \frac{a}{2}$ i $CA = CA_2 = \frac{a}{2}$.

Tada je $A_1D = A_2D = a$ visina date piramide pa je zapremina:

$$V = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}}{2} \cdot a = \frac{a^3}{24}$$



IX-2: Neka je x dužina svih uzbrdica od A do B, y dužina ravnog puta i z dužina svih nizbrdica od A do B. Tada je z dužina svih uzbrdica od B do A, y dužina ravnog puta i x dužina svih nizbrdica od B do A.

Iz uslova zadatka slijedi $\frac{x}{60} + \frac{y}{72} + \frac{z}{90} = 5$ i $\frac{x}{90} + \frac{y}{72} + \frac{z}{60} = 4$ tj $6x + 5y + 4z = 1800$ i $4x + 5y + 6z = 1440$. Sabiranjem posljednje dvije jednačine dobijamo $10x + 10y + 10z = 3240$ tj. $x + y + z = 324$ koliko je i rastojanje između gradova A i B izraženo u kilometrima.

Vesna Matković, Sanja Popović, Miloš Gojačanin, Aleksandra Čejović,
JU OŠ „Drago Milović“, Tivat

PRIPREMA ZA ČAS

Predmet	Matematika
Nastavnice	Sanda Ivanović, Maja Martinović
Razred	VI
Nastavna jedinica	Procenat
Tip časa	Obrada
Nastavne metode	Monološka, dijaloška
Nastavna sredstva	Udžbenik, tabla, kreda
Ishodi učenja	***Učenici će moći da:*** • Definišu pojam procenta; • Prepoznaju procente u životnim situacijama; • Računaju 10%, 20%, 50%, 75%,... nekih veličina usmeno; • Pretvaraju razlomke i decimalne brojeve u procente i obrnuto; • Analiziraju podatke izražene procentima u kružnom dijagramu

Uvodni dio časa

Šta je decimalni razlomak?
Šta je decimalni broj?
Da li ste se nekad sreli sa pojmom procenta?
Navedite neki primjer ili situaciju.

Evo nekih primjera: procenat uspješnosti šuta na utakmici, procenat nagiba puta na saobraćajnom znaku, procenat sniženja cijena u prodavnici, procenat koji pokazuje do kojeg nivoa je napunjena baterija na telefonu, tabletu,.., procenat preuzimanja nekog fajla ili programa...

Glavni dio časa

Procenat

1) Procenat je stoti dio cjeline, ili procenat je jedan od 100, ili po jedan od svakih 100... Oznaka za procenat je %, pa se 1 procenat označava sa 1%, 25 procenata sa 25%, ... p% procenata sa p%, pa je:

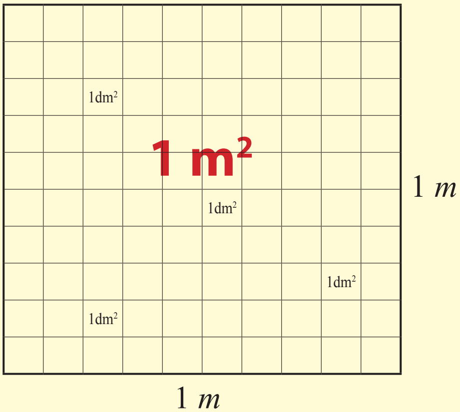
$$1\% = \frac{1}{100};\ 25\% = \frac{25}{100};\ \dots\ p\% = \frac{p}{100};$$

Primjer 1:

$1\ dm^2 = \dfrac{1}{100} m^2$, pa je $1\ dm^2 = 1\%\ m^2$

$1\ cm^2 = \dfrac{1}{100} dm^2$, pa je $1\ cm^2 = 1\%\ dm^2$

$1\ mm^2 = \dfrac{1}{100} cm^2$, pa je $1\ mm^2 = 1\%\ cm^2$



Za domaći rad:

Koliko procenata od m^2 iznosi:

a) 5 dm^2;

b) 200 cm^2?

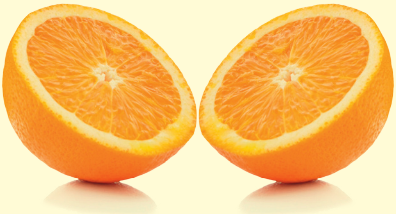
2) Šta ako razlomak nema imenilac 100? Da li tada možemo zapisati razlomak kao procenat? Decimalne razlomke možemo pretvoriti u procente tako što ih proširimo ili skratimo tako da u imeniocu dobijemo 100.

Primjer 2:

Predstaviti sljedeće razlomke u obliku procenta: $\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{2}{5}$; $\dfrac{3}{4}$; $\dfrac{7}{10}$; $\dfrac{1}{25}$;

a) $\dfrac{1}{2} = \dfrac{1 \cdot 50}{2 \cdot 50} = \dfrac{50}{100} = 50\%$ Dakle, polovina je isto što i 50%.

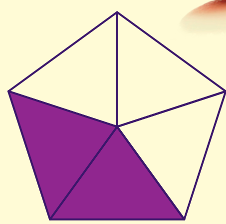
Pomorandža



50% pomorandže

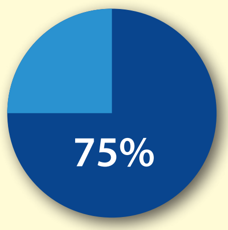
b) $\dfrac{2}{5} = \dfrac{40}{100} = 40\%$

Na slici su obojene $\dfrac{2}{5}$ ili 40% petougla.



c) $\dfrac{3}{4} = \dfrac{75}{100} = 75\% = 75\%$

75% kruga je isto što i $\dfrac{3}{4}$ kruga.



Na isti način $\frac{7}{10} = 70\%$ i $\frac{1}{25} = 4\%$.

Za domaći rad: Zapisati u obliku procenta $\frac{3}{50}$, $\frac{11}{20}$.

3) Racionalni brojevi se pojavljuju i u decimalnom obliku, pa se nameće pitanje da li se decimalni broj može zapisati u obliku procenta. Konačan decimalni broj se zapisuje kao procenat tako što se pomnoži brojem 100.

Primjer 3:

Izraziti decimalne brojeve 0,2; 0,25; 0,125 u obliku procenta.

$$0{,}2 = 0{,}2 \cdot \frac{100}{100} = \frac{20}{100} = 20\%.$$

Zaključujemo da je 0,2 isto što i $\frac{1}{5}$ a to isto što i 20%.

0,2	**20%**	$\frac{1}{5}$	$\frac{20}{100}$	**Jedna petina**

$0{,}25 = \frac{25}{100}$ (ili $\frac{1}{4}$), dok je 0,125 = 12,5% (ili $\frac{1}{8}$).

Za domaći rad:

Izraziti u obliku procenta 1,2; 0,36.

4) Ostalo je da razmotrimo kako da one razlomke koji nisu decimalni, i njihove beskonačno periodične decimalne zapise, zapišemo kao procente.
To je moguće samo približno, tako što prvo zaokružimo decimalni broj, a zatim ga pomnožimo brojem 100, npr. $\frac{1}{3} = 0{,}\dot{3} \approx 0{,}33 = 33\%$
(ili, eventualno, 33,3%).

Ili $\frac{4}{27} = 0{,}\dot{1}4\dot{8} \approx 0{,}15 = 15\%$

Da li je moguće procente pretvarati u razlomke i decimalne brojeve i kako to uraditi?

Primjer 4:

Zapisati 6%, 40%, 100% na dva načina.

$$6\% = \frac{6}{100} = 0{,}06; \quad 40\% = \frac{40}{100} = 0{,}4; \quad 100\% = \frac{100}{100} = 1$$

Zadatak 3:

Usmeno popuniti tabelu:

Razlomak	Decimalni broj	Procenat
1 / 4		
	0,1	
		50%
3 / 4		
		20%
	0,3	
9 / 10		
		60%

Primjena procenta u zadacima

Kako se izračunava procenat?

Računanje procenta se svodi na množenje razlomaka ili decimalnih brojeva.

Primjer 5:

Koliko je 20% od broja 20?

I način 20% od 20 => $20\% \cdot 20 = \frac{20}{\cancel{100}_5} \cdot \cancel{20}^1 = 4$

II način $20\% \cdot 20 = 0{,}2 \cdot 20 = 4$

Za domaći rad:

a) Koliko je 1% punog ugla? b) Izračunati: 15% od 20 i 35% od 45.

Zaključni dio

Šta je procenat? Navedite neke primjere procenata.

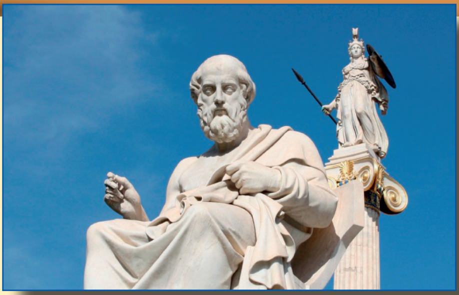
Kakva je veza između procenata, razlomaka i decimalnih brojeva?

Koji dio od čokolade iznosi njenih 50%?

Koliko je 100% od 2 *kg*? Izračunati 12% od 200!

Vanja Đurđić Kuzmanović

PLATON



Platon je bio uticajan starogrčki filozof i besjednik, Sokratov učenik, a Aristotelov učitelj i osnivač AKADEMIJE u Atini. To je bila prva institucija za visoko obrazovanje u zapadnom svijetu, koja će nastaviti da postoji i posle Platonove smrti. Sa preko 900 godina postojanja, Akademija je i danas univerzitet sa najdužim trajanjem u istoriji. Platon je predavao na Akademiji i pisao u formi dijaloga o mnogim filozofskim temama, a u većini dijaloga se pojavljuje Sokrat kao glavni akter.

Zbog nedostataka preciznih izvora iz perioda u kojem je živio, činjenice o Platonovom životu konstruisali su njegovi učenici, a potom i savremeni istoričari, iz djela koja je ostavio za sobom. Pretpostavlja se da je godina Platonovog rođenja 428.g.p.n.e. Za razliku od svog učitelja Sokrata koji potiče iz prostog naroda, Platon je iz aristokratske porodice. Njegov otac Ariston, potomak je kraljeva Atine, a majka Periktiona potiče iz ugledne porodice državnika. Kao i mnoge dječake istog društvenog staleža i Platona su podučavali najbolji predavači. Lekcije koje je učio bavile su se teorijama koje su postavili Pitagora i Parmenid.

Platonov otac umro je kada je on još uvijek bio dječak, a njegova majka se preudala. Platon je imao dva brata, sestru i polubrata. Članove porodice često je spominjao u svojim dijalozima, zbog čega se smatra da se ponosio svojim porijeklom.

Platonu su u mladosti dva događaja bitno uticala na dalji tok života. Prvo, upoznao je grčkog filozofa Sokrata kada je imao 20 godina. Sreli su se na mjestu gdje su se okupljali Atinjani, gdje se diskutovalo o politici, sklapali poslovi i, naravno, razgovaralo o filozofiji. **„Ja znam da ništa ne znam, i srećan sam, jer jedini način da napredujemo u znanju jeste da priznamo koliko ne znamo“** - rekao je Sokrat u jednoj svojoj debati. Platon je bio impresioniran Sokratovim dijalozima i debatama toliko da je odlučio da postane njegov učenik i posveti svoj život izučavanju **teorije ideja** i formiranju plemenitog karaktera.

Drugi značajan događaj bio je rat između Atine i Sparte, u kome je Platon učestvovao između 409. i 404. g.p.n.e. Desilo se ono što je Platon i pretpostavio, Sparta je dobila rat. Bio je to veoma težak period za Atinjane. Platon je želio da pomogne sunarodnicima, ali nije znao kako. Njegova dva ujaka, koji su se bavili politikom, podsticali su ga da sarađuje sa vlašću. Međutim, Platonove dobre namjere ubrzo su se suočile sa nepravdama vladavine trideset tirana i za kratko vrijeme je napustio politiku. Atinski narod se pobunio protiv vladavine tirana i uspio ponovo da uspostavi demokratiju. Platon, oduševljen tim novim periodom, odlučio je da se vrati u politiku. Ali, ovoga puta razočarenje je bilo mnogo veće. Nove vođe su optužile Sokrata da kvari omladinu i vrijeđa bogove. Platon je znao da su ove optužbe bile netačne i branio je svog učitelja svim snagama. Međutim, nije mogao da spriječi da Sokrata zatvore i osude na smrt. Mudrac je proveo svoje poslednje dane u ćeliji. Njegovi sljedbenici predložili su mu plan da pobjegne, ali je on želio da poštuje zakon. U poslednjem trenutku, okružen svojim najboljim prijateljima, ispio je otrov od kojeg je umro. Bio je to težak udarac za Platona. Sa 28 godina napustio je politiku i odlučio da se bavi isključivo filozofijom.

Nakon Sokratove smrti, Platon je proveo 12 godina putujući Mediteranom, učeći matematiku u Italiji, a geometriju, geologiju, astronomiju i religiju u Egiptu. Sebi je obećao da će odbraniti Sokratovu čast i da će zastupati njegove ideale. Tada je počeo da piše poznate dijaloge. Zahvaljujući njima, duh njegovog učitelja zadržao se tokom narednih vijekova, sve do današnjih dana.

Platonova najpoznatija djela su: Odbrana Sokratova, Protagora, Eutifron, Hipija I, Hipija II, Ijon, Država, Teorija forme.

Visokoškolsku instituciju - Akademiju, Platon je osnovao oko 385. g.p.n.e. Na ulazu u Akademiju je pisalo: „**Neka ne ulazi niko ko ne poznaje geometriju**“. Natpis više nego jasno svjedoči o značaju koji su Platon i njegovi sljedbenici pridavali matematici, postavljajući je u same temelje znanja. Grci su već u Platonovoj epohi, a i mnogo vjekova kasnije, jasno razdvajali aritmetiku kao nauku o cijelim i racionalnim brojevima, i geometriju kao nauku o veličinama. Na Akademiji se osim matematike izučavala astronomija, biologija, politička teorija i filozofija. Akademija je brzo postala poznata u cijeloj regiji i Platon je oko sebe okupio intelektualnu elitu tadašnje Grčke. Iako sam nije imao nikakvih matematičkih rezultata, značaj koji je pridavao matematici učinio je da se oko Akademije okupe skoro svi značajni grčki matematičari 4. vijeka p.n.e. Neki od nji su: **Eudoks**, stvaralac teorije proporcija i teorije izračunavanja površina i zapremina metodom ekshaustije; **Teetet**, stvaralac teorije poliedara; **Arhit**, koji je bio i lični Platonov prijatelj i koji je u velikoj mjeri zaslužan za Platonovo poznavanje matematike i pitagorejstva. Platonovo isticanje značaja matematike u obrazovanju pokazalo se od suštinske važnosti za razumijevanje vasione, a njegove ideje o pravednom društvu i jednakosti pojedinca osnova su moderne demokratije.

Platon je poslednje godine života proveo na Akademiji, predajući filozofiju. Da bi se njegove teorije što lakše razumjele, pričao je priče koje je sam izmišljao. Jedna od njih bila je Alegorija pećine:

– Zamislite da su neki ljudi još kao mali vezani u lance u dubini jedne pećine. Nijesu mogli ništa da vide, osim na zidu pećine sjenke ljudi i životinja koji prolaze pored. Što su ljudi mislili o ovim prikazima?

– Da u stvarnosti samo postoje sjenke, odgovorio je jedan vrlo oštrouman učenik.

– Odlično, vidim da si čitao moje spise, čestitao mu je učitelj.

– Zamislite da jedan od njih pobjegne. Kada izađe iz pećine, sunce će smetati njegovim očima, ali kada se navikne na svjetlost, otkriće da sve što je video na zidu jesu odrazi stvarnih predmeta. I dobro, do kog zaključka ste došli na osnovu ove priče?

– Da je put znanja težak, ali zahvaljujući njemu uspijevamo da spoznamo stvarnost, odgovorio je isti učenik.

– Naravno, ali ne samo to. Razmišljajte o ovoj priči. Taj inteligentni učenik zvao se **Aristotel** i vremenom će postati sjajan, poput svog učitelja.

ZANIMLJIVA STRANA

Jelena Blečić

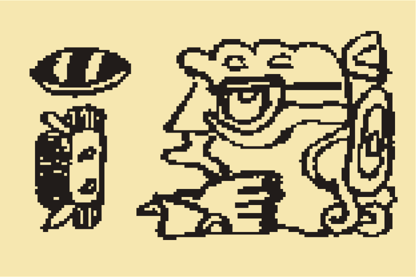
KAKO JE NASTALA NULA

Nula kao broj i kao cifra nije nastala kada i ostale cifre: 1, 2, … ,9. Brojevi od 1 do 10 korišteni su od kada je čovjek počeo da prebrojava stvari oko sebe ili da računa proteklo vrijeme.

Nula je u početku korištena kao oznaka mjesta, tj. samo kao pokazivač koji nam pomaže da razlikujemo broj 10 od 100. To se koristilo između 4000 i 3000 god. prije nove ere u starom Vavilonu (područije današnjeg Iraka). Na slici 1. prikazan je broj 104, ali kako su Vavilonci koristili sistem sa osnovom 60 (imali su 60 znakova da bi obilježili brojeve) u dekadnom sistemu (kojeg mi danas koristimo) taj broj je 3604. Formiranje nule od obične oznake u broj počelo je negdje oko petog vijeka nove ere u Indiji. Paralelno tome, u par prvih vjekova nove ere, nula se kao broj koristila i u Majanskoj kulturi na području današnje Amerike. Maje su nulu obilježavale simbolom koji je sličan školjki, slika br. 2.

Slika 1.

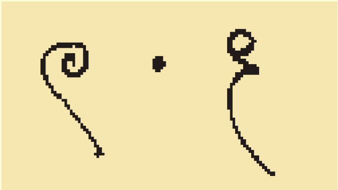
U Vavilonu su prazno mjesto označavali duplim klinom (u sredini).



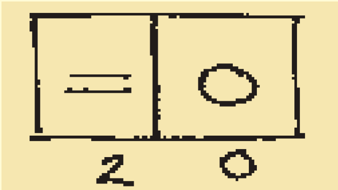
Slika 2.

Nakon Vavilonaca, nula kao pokazivač mjesta, proširila se na istok, područje današnje jugoistočne Azije i Kine.

Tek je indijski matematičar Bramagupta oko 650. godine nove ere shvatio značaj nule kao broja. Prilikom računskih operacija koristio je tačku da bi označio mjesto u broju gdje je nula i tu tačku nazvao sunya /ʃu:n'jɑ:/ što znači prazno. On je i prvi koji je definisao računske operacije sa nulom, ali je pogrešno definisao dijeljenje sa nulom. Na slici 3. prikazan je broj ispisan indijskim ciframa gdje je nula obilježena tačkom.



Slika 3.



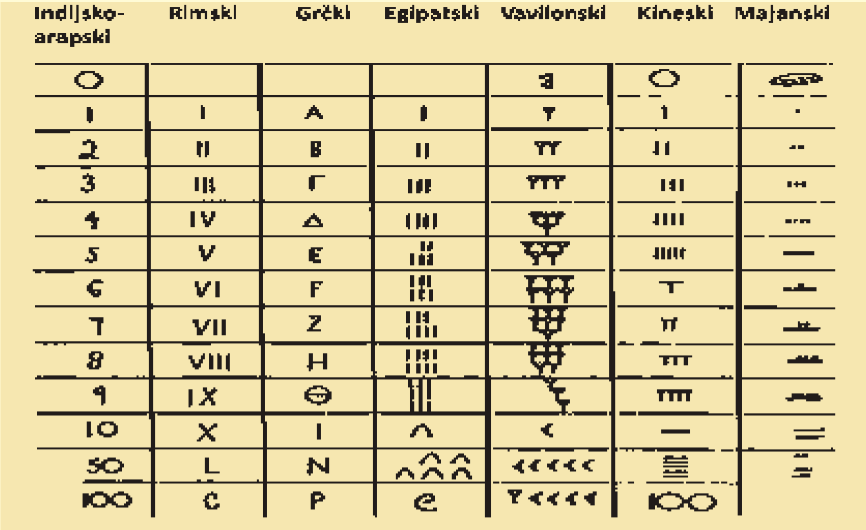
Slika 4.

U Kini i Kambodži nula se prvi put zapisuje u obliku u kojem je i danas poznata. Na slici 4. prikazan je broj napisan kineskim ciframa. U tom obliku od Kineza, preuzeli su je Arapi.

Persijski matematičar ibn-Musa al-Khowarizmi /al-Hvarizmi/ koristio je nulu da bi prikazao rješenja jednačina koje su jednake nuli (prema tom djelu u kome je objasnio rješenja jednačina, algebra je dobila ime). Time je pokazao da je nula nezaobilazna prilikom rješavanja aritmetičkih izraza. Al-Hvarizmi je nulu nazivao sifr odakle potiče riječ cifra.

Grčka i Rimska kultura uopšte ne spominju nulu. U Grčkoj civilizaciji pojam broja se vezivao za čisto praktičnu stvar: brojevi su služili da se predstavi dužina. Kojim onda geometrijskim oblikom predstaviti nešto što nije ništa? Zato Grci i ne koriste nulu.

Iako se u Grčkoj povremeno razmatrao taj koncept, u Rimskoj kulturi nula i prazno smatrani su bogohuljenjem. Dokaz da Rimska kultura nije koristila nulu vidimo u rimskim brojevima. Nula je jedini broj za koji ne postoji oznaka u rimskim brojevima (slika 5).



Slika 5.

Poslije Arapa, zahvaljujući osvajanjima Mavara, pojam nule stiže u Evropu tek negdje sredinom 12-tog vijeka. Italijanski matematičar Fibonači naišao je na djela al-Hvarizmija, prilikom putovanja po sjeveru Afrike. Prilikom prevođenja njegovih djela upoznaje se sa arapskim ciframa i nulom. Fibonači vrlo brzo uviđa prednosti računanja sa arapskim ciframa i to usvajaju i italijanski i njemački trgovci (koji su do tada računali koristeći rimske cifre). Ali zvaničnici i tadašnji naučnici su i dalje bili vrlo sumljičavi prilikom upotrebe arapskih cifara, naročito nule koju nisu ni smatrali brojem, tako da one još uvijek nisu korištene u javnim dokumentima, a ponegdje su bile i zabranjivane.

Par stotina godina kasnije, francuski matematičar Rene Dekart koristi nulu prilikom definisanja pravouglog koordinatnog sistema. Poslije Dekarta, njemački matematičar i filozof Lajbnic, te engleski matematičar i fizičar Isak Njutn u svojim djelima su zaokružili računske operacije sa nulom, definišući dijeljenje sa nulom (iz kojeg je proistekao limes - granična vrijednost funkcije).

Oni su razmatrali kretanje tijela i promjene u tom kretanju u jako malim vremenskim razmacima. Baratali su sa malim veličinama čije vrijednosti su bile blizu nule. Iz toga je nastao infinitezimalni račun iz kojeg se kasnije razvila matematička analiza, kao grana matematike, ali i fizika i određeni aspekti ekonomije.

Upravo to postignuće Njutna i Lajbnica omogućilo je tehnološku revoluciju bez koje je današnji svijet nezamisliv. Tako je nula konačno dobila mjesto koje zaslužuje kao svaki drugi broj.

Zanimljiva matematika

1) U tri korpe nalazi se: 12, 14 i 22 jabuke. Sa tri prebacivanja treba izjednačiti broj jabuka u sve tri korpe. Prebacivanje se može izvršiti samo tako, da se iz jedne korpe premjesti u drugu tačno onoliko jabuka koliko ih u drugoj već ima. Opisati na koji način se to može izvesti.
2) U datom izrazu treba povući liniju tako da jednakost bude tačna:
   $5 + 5 + 5 + 5 = 555$.
3) Razmjestiti 15 piona u pet redova, tako da u svakom redu budu po četiri piona. Kako se to može uraditi?
4) Naći tri prirodna uzastopna broja čiji proizvod je isti kao i njihov zbir.
5) Koliko ima trocifrenih brojeva koji se čitaju s lijeva u desno isto kao i s desna u lijevo?

Jelena Blečić, JU OŠ „Maksim Gorki“, Podgorica

U susret Olimpijadi znanja koja će biti u maju ove godine, dajemo zadatke iz 2018. godine

OLIMPIJADA ZNANJA 2018

MATEMATIKA ZA VII RAZRED OSNOVNE ŠKOLE

1. Formiran je niz brojeva po sljedećem pravilu: prvi broj u nizu je jednocifren, a svaki sljedeći je dobijen tako što je broj ispred njega uvećan za 9. Naći prvi broj u nizu ako se zna da je broj 2018 element ovog niza.

2. U jednom odjeljenju koje broji više od 20 a manje od 30 učenika organizovane su različite sekcije. Petina učenika koji pohađaju matematičku sekciju, pohađaju istovremeno i sekciju za fiziku, a četvrtina učenika koji pohađaju sekciju za fiziku pohađaju i matematičku sekciju. Petar i Marko su jedini u odjeljenu koji ne pohađaju nijednu sekciju. Koliko ima učenika u odjeljenju, koliko njih pohađa matematičku, koliko fizičku sekciju, a koliko obje?

3. U ΔABC na stranici AC izabrane su tačke D i E takve da je $AD = DE = EC$. Može li se dogoditi da bude $\angle ABD = \angle DBE = \angle EBC$? Obrazložiti odgovor.

4. Na novogodišnoj traci postavljene su crvene i plave lampice tako da pored svake crvene stoji bar jedna plava lampica. Koliki je najveći mogući broj crvenih lampica, ako se zna da je ukupan broj lampica 50?

RJEŠENJA:

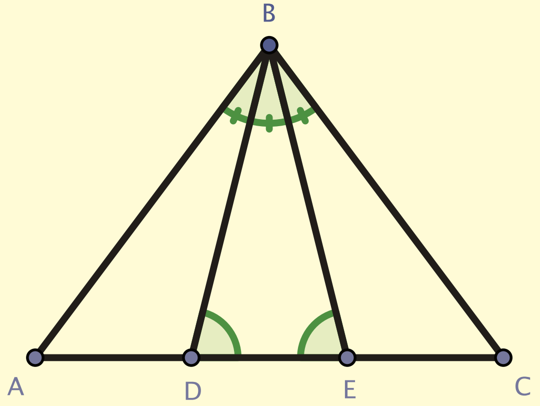
1. Primijetimo da je $2018 = 224 \cdot 9 + 2$. Dakle, prvi broj u nizu je 2.

2. Označimo sa x broj učenika koji pohađaju i matematičku i fizičku sekciju. Tada je broj onih koji pohađaju matematičku $5x$, a broj onih koji pohađaju fizičku $4x$. Broj onih koji pohađaju samo matematičku sekciju je $5x - x = 4x$, a broj onih koji pohađaju samo fizičku sekciju jednak je $4x - x = 3x$. Dakle, ukupan broj učenika u odjeljenju je:

$$4x + 3x + x + 2 = 8x + 2,$$

i taj broj mora biti između 20 i 30, tj. $18 < 8x < 28$. Jedini prirodni broj koji zadovoljava ovaj uslov je $x = 3$, pa je broj učenika koji pohađaju matematicku sekciju $5 \cdot 3 = 15$, ukupan broj učenika koji pohađaju fizičku sekciju je $4 \cdot 3 = 12$, a ukupan broj učenika u odjeljenju je $8 \cdot 3 + 2 = 26$.

3. Posmatrajmo trougao ABE. Tada je BD njegova težišna linija, pa ako bi bilo $\angle ABD = \angle DBE$ tada bi BD bila i simetrala ugla. To bi značilo da je ΔABE jednakokraki sa osnovicom AE, pa bi BD bila njegova visina i simetrala ugla. Slično se zaključuje da je ΔDBC jednakokraki sa osnovicom DC, pa je BE njegova visina i simetrala ugla. Dobijamo: iz tačke B postoje dvije normale na pravu AC, što je nemoguće. Dakle, ne postoji trougao kod koga je uslov $\angle ABD = \angle DBE = \angle EBC$ zadovoljen.



4. Iz uslova zadatka slijedi da među svake 3 uzastopne lampice je bar jedna plava (3 crvene lampice ne mogu stajati jedna do druge). To znači da među prvih 48 lampica ima bar 48 : 3 = 16 plavih, tj. najviše 32 crvene lampice. Primijetimo da poslednje dvije lampice (49. i 50.) ne mogu biti obje crvene, pa crvenih ne može biti više od 32 + 1 = 33. Pokažimo da možemo postaviti lampice tako da zadovoljavaju uslove zadatka, i da bude 33 crvene lampice. Ako plave lampice postavimo na mjestima 2, 5, 8, 11,..., 47 i između njih crvene, a da dvije poslednje budu jedna plava i jedna crvena, tada ćemo ukupno imati 33 crvene i 17 plavih lampica.

MATEMATIKA ZA VIII RAZRED OSNOVNE ŠKOLE

1. Odrediti sve realne brojeve a, b, c za koje je

$$a^2 + 5b^2 + 8c^2 - 4ab - 4bc - 8c = -4.$$

2. Odrediti maksimalno $n \in N$ tako da važi:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} > \frac{1}{135} \qquad (1)$$

3. Neka tačka E polovi stranicu CD kvadrata $ABCD$. Tačka F je podnožje normale iz tjemena B na AE. Dokazati da se dužine stranica trougla ΔEFB odnose kao 3 : 4 : 5.

4. U tablicu dimenzije 10 × 10 upisani su brojevi od 0 do 99 kao na slici:

0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
1	11	21	31	41	51	61	71	81	91
2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
9	19	29	39	49	59	69	79	89	99

Dunja je ispred pola od njih upisala znak „–“ tako da je u svakoj koloni i svakoj vrsti znak „–“ postavila ispred tačno 5 brojeva (to jeste u tačno 5 polja). Na kraju je sabrala sve brojeve dobijene u ovoj tabeli. Koje brojeve je Dunja mogla dobiti kao zbirove?

RJEŠENJA:

1. Prepišimo jednačinu u obliku

$$a^2 + 5b^2 + 8c^2 - 4ab - 4bc - 8c + 4 = 0$$

Dopunjavanjem lijeve strane do potpunih kvadrata dobijamo:

$$(a - 2b)^2 + (b - 2c)^2 + 4(c - 1)^2 = 0 \Rightarrow a = 2b,\ \ b = 2c,\ \ c = 1.$$

Dakle,

$$a = 4,\ \ b = 2,\ \ c = 1.$$

2. Vidimo da važi

$$\frac{3}{n} > \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} > \frac{1}{135}$$

tako da n mora zadovoljavati:

$$\frac{3}{n} > \frac{1}{135} \Rightarrow n < 405$$

Ako je n najveći prirodan broj takav da važi (1) tada mora biti:

$$\frac{3}{n+2} < \frac{1}{135} \qquad (2)$$

jer inače

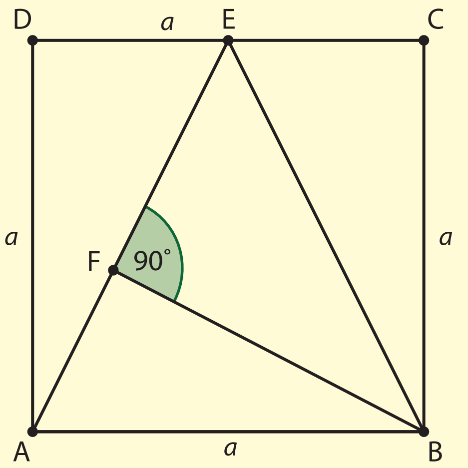
$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} > \frac{1}{135},$$

što je u kontradikciji s pretpostavkom maksimalnosti broja n takvog da važi (1). Iz (2), vidimo da mora biti

$$n > 403.$$

Prema tome, maksimalno n za koje važi (1) je $n = 404$. (Isto se, neposredno po zaključku da mora da važi nejednakost $n < 405$, moglo dobiti i direktnom provjerom!).

3.



Označimo sa a dužinu stranice ovog kvadrata. Na osnovu Pitagorine teoreme, iz ΔBCF važi:

$$BE = \frac{\sqrt{5}}{2}a.$$

Iz površine trougla ABE, vidimo da važi

$$\frac{AE \cdot BF}{2} = \frac{a^2}{2} \Rightarrow BF = \frac{2}{\sqrt{5}}a.$$

Na kraju, iz ΔBCF *i* Pitagorine teoreme vidimo da važi:

$$EF = \sqrt{\frac{5}{4}a^2 - \frac{4}{5}a^2} = \frac{3}{2\sqrt{5}}a.$$

Sada lako provjerimo

$$BE : EF = \frac{\sqrt{5}}{2} : \frac{3}{2\sqrt{5}} = 5:3 \text{ i } BF : EF = \frac{2}{\sqrt{5}} : \frac{3}{2\sqrt{5}} = 4:3$$

tj.

$$BE : EF : EF = 5:4:3$$

4. Primijetimo prvo da se zbir ma kojih n cijelih brojeva $a_1, a_2, \ldots ; a_n$ sa najviše dvije cifre može dobiti kao zbir $D + J$, gdje je D zbir svih desetica, a J zbir svih jedinica ovih n brojeva.

Na primjer: 13 + 5 – 27 + 46 = (10 – 20 + 40) + (3 + 5 – 7 + 6).

Vratimo se sada na naš zadatak. Označimo sa D zbir desetica svih 100 cijelih brojeva koji su se, po završenom procesu dopisivanja znakova „–" našli u tabeli, a sa J zbir njihovih jedinica.
Kako je u svakoj vrsti broj pozitivnih brojeva jednak broju negativnih, zbir desetica po kolonama je 0, pa je $D = 0$. Slično, zbir jedinica u svakoj od 10 vrsta je 0, pa je i $J = 0$.

Dakle, jedini broj koji je Dunja mogla dobiti kao zbir je 0.

MATEMATIKA ZA IX RAZRED OSNOVNE ŠKOLE

1. Odrediti rješenja sistema jednačina:

$$ab = 2(a+b) - 4$$
$$a^2 + b^2 = 4$$

2. Ako postoji $a \in \mathrm{N}$, $a \geq 2$, takav da

$$a \mid 2^{2018} - 1 \text{ i } a \mid 2^{4039} - 1,$$

naći ga. U suprotnom dokazati da takvo a ne postoji.

3. U trouglu ABC ugao kod tjemena A je dva puta veći od ugla kod tjemena B. Simetrala ugla kod tjemena C siječe duž AB u tački D. Dokazati da važi:

$$|BC| = |AD| + |AC|.$$

RJEŠENJA:

1. Pomnožimo prvu jednačinu sa 2 i dodajmo drugoj. Dobijamo:

$$(a+b)^2 = 4(a+b) - 4 \Rightarrow (a+b-2)^2 = 0 \Rightarrow a+b=2 \Rightarrow a = 2-b.$$

Sada iz $ab = 2(a+b) - 4$ i $a+b=2$ dobijamo

$$b(b-2) = 0 \Rightarrow b = 0 \text{ ili } b = 2$$

odakle vidimo da postoje dva para rješenja sistema: (2, 0) i (0, 2).

2. Pretpostavimo da takvo a postoji. Kako a dijeli i $2^{4039} - 1$ i $2^{2018} - 1$ to je a neparan broj koji dijeli i njihovu razliku:

$$a \mid (2^{4039} - \mid 2^{2018}) = a \mid 2^{2018}(2^{2021} - 1) \Rightarrow a \mid 2^{2021} - 1.$$

Slično prethodnom, kombinujući djeljivost $2^{2021}-1$ i $2^{2018}-1$ sa a, vidimo da

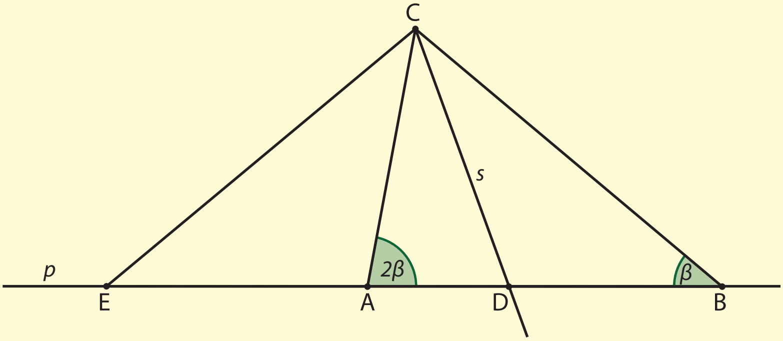
$$a \mid 2^{2018}(2^3-1) \Rightarrow a \mid 7 \Rightarrow a=7.$$

Ostaje da provjerimo da li broj $7 \mid 2^{2018}-1$ i $7 \mid 2^{4039}-1$.

Kako je $2^{2018}=(2^3)^{672}\cdot 4$, to je ostatak pri dijeljenju broja 2^{2018} sa 7 jednak 4, pa 7 ne dijeli $2^{2018}-1$.

Zaključak: Ne postoji $a \in \mathrm{N}$, $a \geq 2$, takav da $a \mid 2^{2018}-1$ i $a \mid 2^{4039}-1$.

3.



Prvi način: Kroz tjeme A produžimo stranicu AB do tačke E tako da važi: $|AE|=|AC|$, to jeste

$$|ED|=|AD|+|AC|.$$

Treba pokazati da je $|ED|=|BC|$.

Trougao ΔEAC je jednakokraki sa kracima AE i AC, odakle zaključujemo da je $\angle AEC=\angle \mathrm{ECA}=\beta$, pa je $|EC|=|BC|$.

Kako je prava s simetrala ugla $\angle ACB$, to važe jednakosti:

$$\angle ECD=\beta+\frac{1}{2}\angle ACB \ \text{ i } \ \angle ADC=\frac{1}{2}\angle ACB.$$

Dakle, trougao ΔEDC je jednakokraki pa je $|ED|=|EC|=|BC|$.

Drugi način: Iz tjemena C povucimo pravu koja pravu $p(AB)$ siječe u tački E tako da je trougao ΔEBC jednakokraki ($EC=BC$) pri čemu je tačka A između tačaka E i B. Sada se, kao i u prethodnom načinu rješavanja, vidi da su trouglovi ΔEAC i ΔEDC jednakokraki i da važi:

$$|BC|=|CE|=|ED|=|EA|+|AD|=|AC|+|AD|.$$

ZADATAK SA NASLOVNE STRANE:

Prvih 5 učenika koji pošalju tačno rješenje zadatka sa naslovne, dobiće na poklon primjerak petog broja *Dijagonale*.

Spisak učenika koji su tačno riješili Nagradni zadatak iz prošlog broja „Dijagonale":

1. **Teodora Vidić** VI-3, JU OŠ "Milan Vukotić", Golubovci,
2. **Nikola Vidić**, VI-7, JU OŠ "Maksim Gorki", Podgorica,
3. **Dušan Vujičić**, VII-2, JU OŠ "Orijenski bataljon", Bijela,
4. **Luka Ćipranić**, VI-e, JU OŠ "Štampar Makarije", Podgorica,
5. **Miljana Stanković**, VII- 3, JU OŠ "Radojica Perović", Podgorica.

Redakcija pohvaljuje učenike **Emira Alkovića** VII razred i **Srđana Lunića**, VIII razred, obojica učenici JU OŠ „Anto Đedović" iz Bara za uspješno riješene Konkursne zadatke.

Uredništvo poziva nastavnike, učenike i sve čitaoce da nam šalju priloge za list: članke, odabrane zadatke, zanimljivosti, priloge za zabavnu matematiku itd.

Dio tiraža ovog broja „Dijagonale" će biti besplatno podijeljen svim nastavnicima matematike u osnovnim školama, kao i svim bibliotekama osnovnih škola u Crnoj Gori.
Ovaj broj se može kupiti u „Gradskoj knjižari" i „Narodnoj knjizi".

Sve informacije o pretplati i porudžbini ovog i narednih brojeva možete naći na sajtu Udruženja. Narudžbe slati putem mejla.

Broj žiro računa UNMCG je **550-18240-71** kod Societe Generale Montenegro banke.
Adresa redakcije je: Ul. Gojka Berkuljana br. 20, Podgorica.
Mejl: udruznastmatem@gmail.com
www.unmcgwordpress.com

CIP - Каталогизација у публикацији
Национална библиотека Црне Горе, Цетиње

ISSN 2536-5851 = Dijagonala
COBISS.CG-ID 36769808

ISSN 2536–5851
9 772536 585009 >