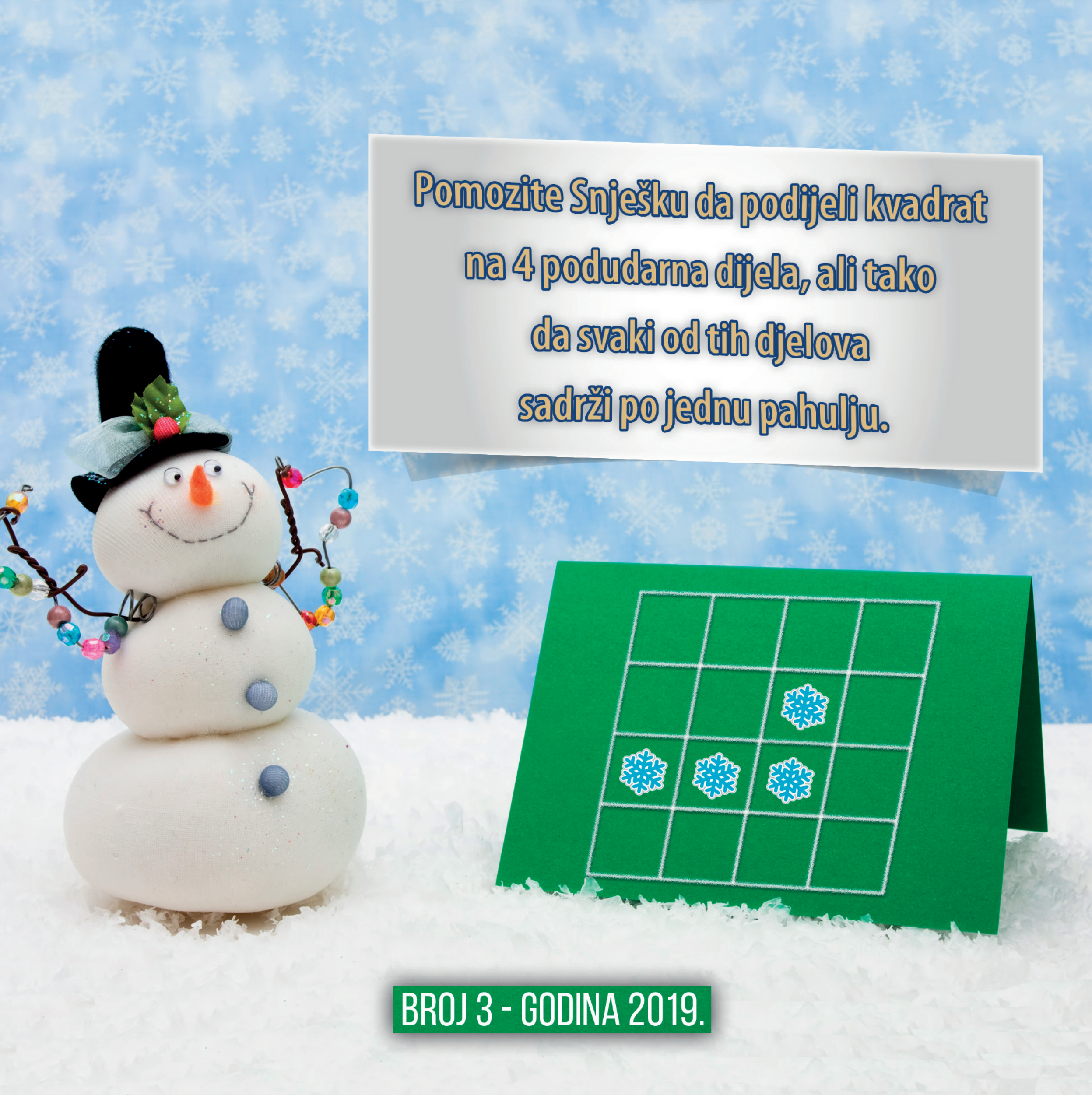
Udruženje nastavnika matematike Crne Gore

Dijagonala

Matematički list za učenike osnovnih škola
Cijena 1,50 €



BROJ 3 - GODINA 2019.

Udruženje nastavnika matematike Crne Gore
Matematički list za učenike osnovnih škola – „**Dijagonala**“, **broj 3**
Godina 2019. Cijena: 1,50 €

Glavni urednik:	*mr Radomir Božović*
Odgovorni urednik:	*Danijela Jovanović*
Redakcija:	*Prof. dr Žarko Pavićević, Prof. dr Radoje Šćepanović, Miodrag Lalić, Prof. dr Milenko Mosurović, Snežana Irić, Aleksandra Vuković, Vanja Đurđić Kuzmanović, Irena Pavićević, Nevena Ljujić*
Lektura:	*Milja Božović, prof.*
Korektura:	*Danijela Jovanović, prof.*
Priprema za štampu:	*Branko Gazdić*
Tiraž:	*1000*
Štampa:	*„Studio Branko“ d.o.o. – Podgorica*

Zavod za školstvo je odlukom broj 01 – 1214/2 od 03.09.2018. godine preporučio časopis „Dijagonala“ za korišćenje u osnovnim školama kao pomoćno nastavno sredstvo.

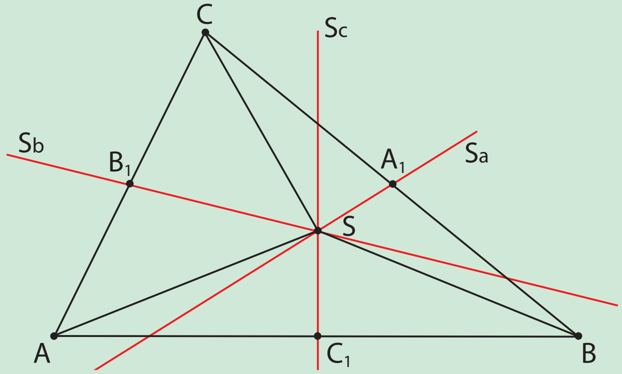
Sadržaj

Ljiljana Kruška

ZNAČAJNE TAČKE TROUGLA

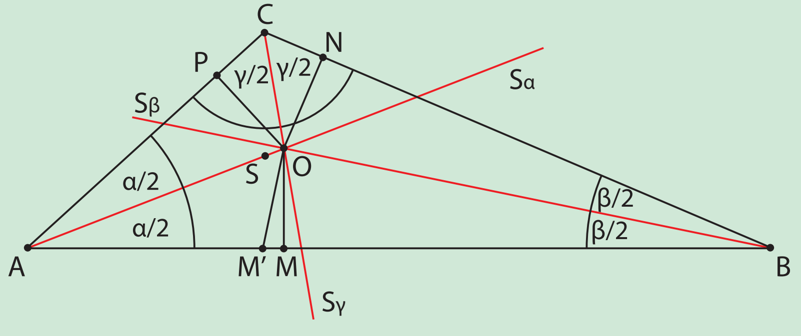
Pored tri tjemena, u svakom trouglu postoje još 4 tačke, koje se nazivaju značajne tačke trougla. To su: **centar opisane kruznice oko trougla** (nalazi se u presjeku simetrala stranica), **centar upisanog kruga u trouglu** (presjek simetrala uglova), **težište** (presjek težišnih duži trougla) i **ortocentar** (tačka u kojoj se sijeku visine trougla). Njihova svojstva opisuju sljedeće teoreme.

Teorema 1: Simetrale stranica trougla sijeku se u jednoj tački.



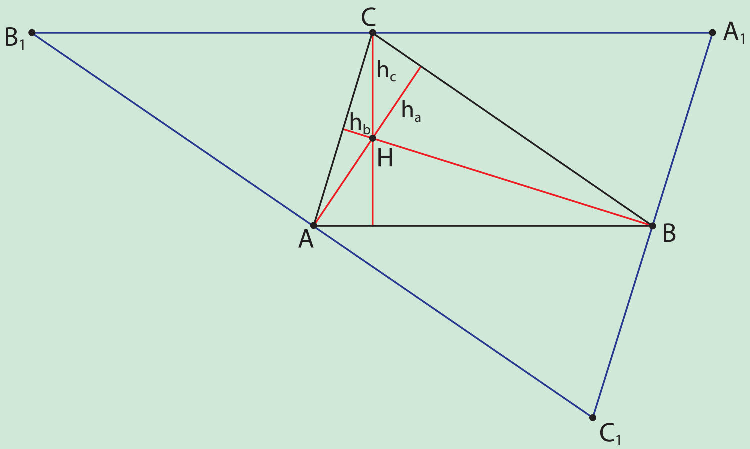
Dokaz: Simetrale s_a i s_b stranica BC i AC trougla ABC sijeku se u tački S. Lako se dokazuje da je $\Delta SBA_1 \cong \Delta SA_1C$, kao dva pravougla trougla sa zajedničkom stranicom SA_1 i katetama $BA_1=A_1C$. Iz ove podudarnosti dobijamo da je CS = SB. Na sličan način zaključujemo da je $\Delta ASB_1 \cong \Delta CSB_1$, pa imamo da je AS = CS. Sada imamo da je AS = BS = CS, a to znači da je trougao ABS je jednakokraki, pa tačka $S \in s_c$ (simetrala osnovice sadrži i vrh). Dakle, tačka S je zajednička tačka za sve tri simetrale stranica trougla ABC, što je trebalo dokazati.

Teorema 2: Simetrale uglova trougla sijeku se u jednoj tački.



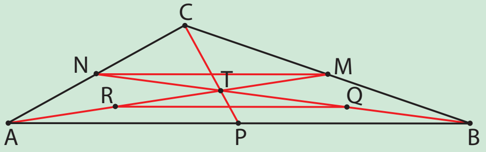
Dokaz: Neka se simetrale S_α i S_β uglova α i ß sijeku u tački O i neka su OM, ON i OP normale iz tačke O redom na stranice AB, BC i CA. Tada je Δ AMO $\cong$ Δ APO, jer su pravougli, imaju zajedničku hipotenuzu AO i po jedan jednak ugao OAM = OAP, pa je OM = OP. Isto tako, iz podudarnosti trouglova MOB i BON dobijamo da je OM = ON, pa sa prethodnim dobijamo da je ON = OP slijedi OM = ON = OP. Sada iz podudarnosti trouglova CNO i CPO (imaju zajedničku hipotenuzu CO, ON = OP, a jednaki su uglovi PCO i NCO) dobijamo da je CO simetrala ugla γ i tačka O je zajednička tačka simetrala sva tri ugla, što je trebalo dokazati. Upisanom krugu u trouglu ABC dodirne tačke sa stranicama su M, N i P, koje su podnožja normala iz centra kruga na stranice tog trougla. Dokažimo da su to jedine dodirne tačke kruga sa trouglom. Pretpostavimo da na stranici AB postoji tačka M′ različita od tačke M, u kojoj upisani krug siječe stranicu AB. Tada bi trougao OMM′ bio pravougli sa hipotenuzom OM′ i imali bi da je OM′ > OM pa bi tačka M′ bila van kruga što je kontradiktorno sa pretpostavkom da pripada krugu.

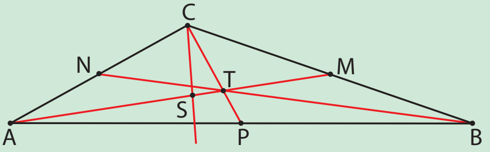
Teorema 3: Prave koje sadrže visine trougla imaju jednu zajedničku tačku.



Dokaz: Kroz tjemena A, B i C trougla ABC povucimo prave paralelne sa naspramnim stranicama BC, AC i AB. Te se prave sijeku i nastaje trougao $A_1B_1C_1$. Svaki od spoljašnjih trouglova BCA_1, ACB_1, ABC_1 su podudarni sa trouglom ABC jer imaju po jednu zajedničku stranicu i dva ugla sa paralelnim kracima. Zato je $AC_1 = AB_1 = BC$, pa je tačka A sredina duži B_1C_1, a visina h_a iz tjemena A trougla ABC je simetrala stranice B_1C_1 trougla $A_1B_1C_1$. Slično se dokazuje da su ostale visine h_b i h_c simetrale stranica trougla $A_1B_1C_1$, pa se prema **teoremi 1** one sijeku u jednoj tački. Tu tačku obilježavamo sa H, i nazivamo ortocentar.

Teorema 4 : Težišne duži trougla se sijeku u jednoj tački.



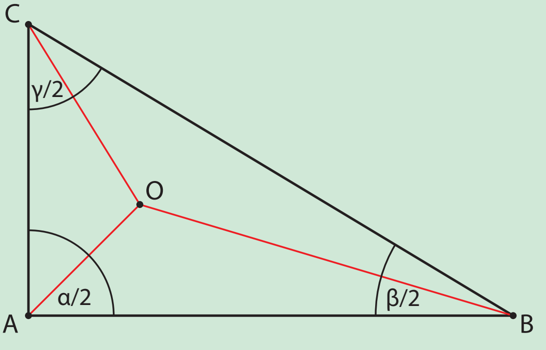


Dokaz: Neka je T zajednička tačka težišnih duži AM i BN trougla ABC. Za početak ćemo dokazati da tačka T dijeli težišnu duž AM u razmjeri 2:1, tj. da je AT = 2MT. Označimo sa R i Q sredina duži AT i BT. Duž RT je srednja duž trougla ABT, a duž MN je srednja duž trougla ABC. Obije ove duži su paralelne stranici AB i jednake njenoj polovini. Zato je MN = RQ. Sada lako dokazujemo da su trouglovi RTQ i MNT podudarni (MN = RT i jednaki uglovi), pa je MT = RT = AR, što znači da je AT = 2MT. Slično se zaključuje da je BT = 2NT. Sada ćemo dokazati da i treća težišna duž CP prolazi kroz tačku T. Pretpostavimo suprotno, da se CP i AM sijeku u nekoj tački S različitoj od T. Tada je AS = 2SM, pa je AS = 2/3 AM. Isto tako AT = 2TM, pa je AT = 2/3 AM. Kako su tačke S i T između A i M, i još je AS = AT, to slijedi da se tačke S i T poklapaju, što je trebalo dokazati.

Centar upisane kružnice i težište su uvijek u trouglu, dok centar opisane kružnice i ortocentar mogu biti u trouglu, ili na stranici trougla, ili neko od tjemena trougla ili van trougla.

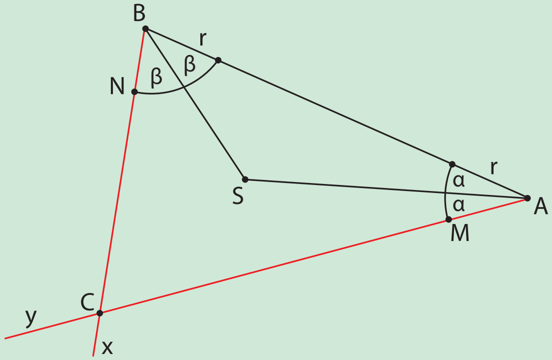
Zadaci:

1. Dokazati da je centar upisanog kruga u trouglu najbliži tjemenu najvećeg ugla.



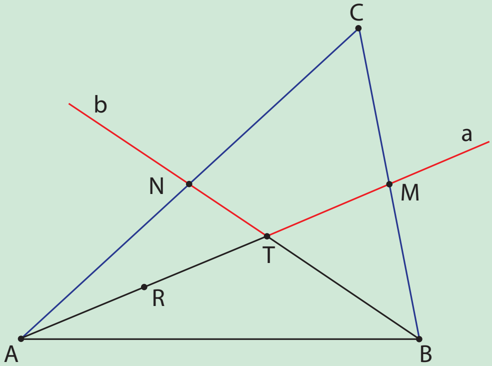
Rješenje: Neka je u trouglu ABC tačka O centar upisanog kruga i $\alpha \geq ß \geq \gamma$. U trouglu AOC je $\frac{\alpha}{2} \geq \frac{\gamma}{2}$ pa je OC ≥ OA, a u trouglu AOB je $\frac{\alpha}{2} \geq \frac{ß}{2}$, pa je BO ≥ AO. Dakle, od duži AO, BO i CO najkraća je duž AO.

2. Nacrtaj tupougli ΔABS gdje je tjeme tupog ugla u tački S. Konstruisati tačku C tako da tačka S bude centar upisanog kruga u trouglu ABC.



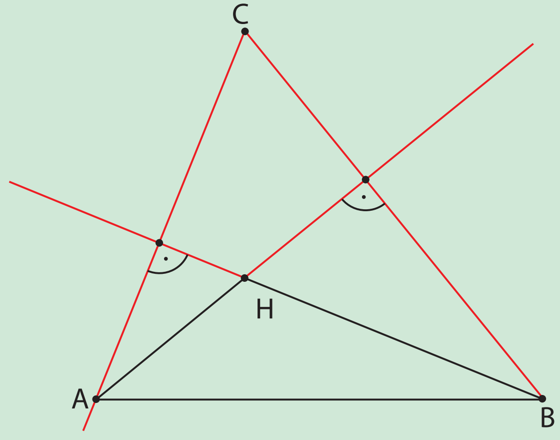
Rješenje: Kako tačka S mora biti centar upisane kružnice i nalazi se na presjeku simetrala uglova, to ćemo u tački B opisati kružni luk i prenijeti veličinu ugla β, tako da prava BS bude simetrala novodobijenog ugla. Na taj način smo dobili polupravu Bx. Isto ćemo uraditi i u tački A. Nadodaćemo sa spoljašnje strane ugla α istu njegovu veličinu, tako da prava AS bude simetrala novodobijenog ugla. Tako smo dobili polupravu Ay. Poluprave Ay i Bx se sijeku u tački C. To je treće tjeme trougla ABC, a tačka S centar upisane kružnice na osnovu teoreme 2.

3. Data je duž AB, i tačka T van nje. Konstruisati trougao ABC tako da tačka T bude težište trougla ABC.



Rješenje: Povucimo polupravu p(AT). Konstruisaćemo središte duži AT, tačku R, i prenijećemo duž RT preko tačke T tako da na polupravoj p(AT) dobijemo tačku M, tako da je RT = TM. Sličnim postupkom iz B povlačimo polupravu q(BT) i na njoj dobijamo tačku N, tako da je 2NT = BT. Presjek pravih c(A,N) i d(B,M) određuje tačku C i traženi trougao ABC.

4. Data je duž AB=3cm i tačka H van te duži (kao na slici). Konstruši trougao ABC tako da H bude ortocentar.



Rješenje: Povučemo pravu a(A,H), pa iz tačke B konstruišemo normalu na pravoj a. Zatim na pravoj b(B,H) konstruišemo normalu iz tačke A. Presjekom te dvije normale dobija se tjeme C trougla ABC, kome je H ortocentar.

Zadaci za vježbu:

1. Data je tačka H u unutrašnjoj oblasti ugla AOB, kome je tjeme O van lista papira. Konstruisati pravu HO
2. U trouglu ABC centar opisane kružnice leži na stranici AB. Ako je ugao između visine koja odgovara stranici AB i poluprečnika OC 27°, koliki su uglovi tog trougla?
3. Na stranicama AB i BC trougla ABC date su redom tačke D i E tako da je AD = 3·AC i BE = 3·BC. Dokaži da je DE paralelno sa AB i izračunaj njenu dužinu ako je AB = 18 cm.
4. a) Dokazati da je u pravouglom trouglu zbir poluprečnika opisane u upisane kružnice jednaka zbiru kateta.

   b) Izračunati poluprečnik upisane kružnice pravouglog trougla ako mu je O = 30 cm a hipotenuza 18 cm.
5. Dokazati da je poluprečnik upisane kružnice dva puta manji od poluprečnika upisane kružnice kod jednakostraničnog trougla.
6. U trouglu ABC upisana je kružnica sa centrom O, a na stranicama AB i BC date su redom tačke M i N tako da je OM paralelno sa BC i ON paralelno sa AB. Dokazati da je četvorougao MBNO romb.

Dr Goran Šuković

STRUKTURA C++ PROGRAMA

U prethodnom broju je objašnjeno kako instalirati odgovarajući prevodilac i pokrenuti program.

1. Struktura programa
   a. Kod koji se nalazi u fajlu main.cpp (uvećan):

main.cpp

```
1  #include <iostream>
2
3  using namespace std;
4
5  int main()
6  {
7      cout << "Hello world!" << endl;
8      return 0;
9  }
10
```

   b. Prvi red (red broj 1) sadrži takozvanu direktivu include. Direktive uvijek počinju simbolom # iza koje slijedi neka posebna riječ (u ovom slučaju je to riječ *include*). Kako naš program želi da štampa neki tekst na ekranu, potrebno je u program uključiti (otuda riječ *include*) odgovarjuće mehanizme za rad sa ekranom. Svi naši programi će koristiti ekran i tastaturu: tastatura je standarni ulaz (engl. input), a ekran je standardni izlaz (engl. output). Skraćeno se ulaz i izlaz na engleskom jeziku označavaju sa `io`, pa je otuda naziv `iostream`. Uvijek će na početku svakog našeg programa postojati ova direktiva:

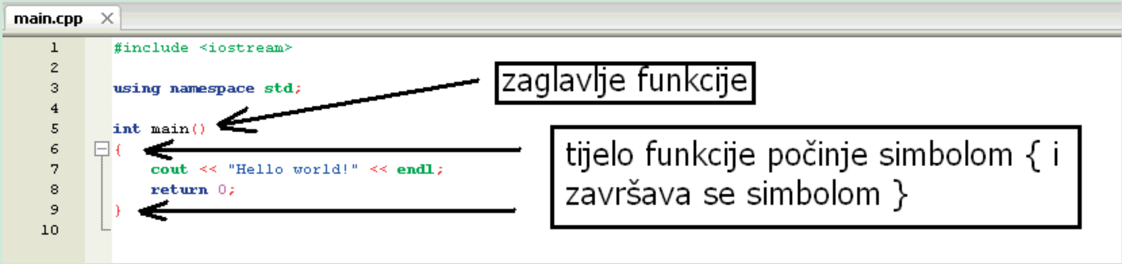
```
#include <iostream>
```

   c. Treći red opisuje takozvani prostor imena (engl. namespace). Svi naši programi će koristiti standardni prostor imena ili skraćeno `std`, pa će poslije direktive `include` uvijek stajati:

```
using namespace std;
```

d. Svaki C++ program mora imati mjesto sa kojeg se počinje izvršavati kod. To mjesto je takozvana funkcija `main`. Kasnije ćemo naučiti šta su funkcije i kako da pišemo naše funkcije. Sam CodeBlocks generiše za nas funkciju `main` i u nju upiše odgovarajući kod. Važno je da posljednja naredba u funkciji `main` bude `return 0`, jer se na taj način šalje poruka operativnom sistemu da vaš program uspješno završava rad.

e. Za sada ćemo sve operacije izvoditi samo unutar funkcije *main* (vidi sliku ispod – sve naše operacije moraju biti između označenih zagrada).



f. Svi redovi koji se nalaze između simbola /* i */ su komentar. Komentar može zauzimati više redova (vidi kod ispod). Ako komentar zauzima samo jedan red, onda se taj red može označiti sa dva simbola /, tj. // (vidi kod ispod).

```
#include <iostream>

using namespace std;
/*
Komentar u vise redova.
Obicno su to neka pojasnjenja
o vasem programu.
*/

// Komentar u jednom redu

int main()
{
    cout << “Hello world!” << endl; // komentar
    cout << “Goran Sukovic” << endl; // endl je novi red
    return 0;
}
```

2. Štampanje rezultata: `cout`
   a. Štampanje rezulatata se obavlja preko objekta `cout`. Štampanje se obavlja tako što ono što štampate „šaljete“ ili „prosljeđujete“ na `cout` primjenom operacije << (dva simbola <, jedan uz drugi, bez razmaka)
   b. CodeBlocks vam pruža pomoć pri kucanju teksta. Čim otkucate `cout`, otvara se pomoćna lista koji prikazuje šta je CodeBlocks prepoznao kao ključnu riječ ili funkciju jezika C++. Ako otkucate jedno slovo, lista prikazuje samo one elemente koji počinju tim slovom, itd. Ako otkucate npr. ca, lista prikazuje samo one elemente koji počinju sa ca. Kada pronađete željeni element, pritisnite Enter i CodeBlocks će otkucati taj element umjesto vas. Ovo važi ne samo za već gotove funkcije, već i za funkcije koje vi napišete.
   c. Ako želite da štampate tekst, tada taj tekst mora biti između dvostrukih navodnika. Takav niz slova ili cifara se zove string. Stringovi su nizovi karaktera (tj. slova, brojeva,...) i moraju biti pod dvostrukim navodnicima. Primjeri stringova su ”`Hello World!`”, ”`Marko Perovic`”, ”`a 123 fg`”, ”`1245`”, ”`Petar\nJasna\nAna`”, ”`a`”, ”`A`”, ”`1`”... Više o stringovima učićemo kasnije.
   d. Prelazak u novi red se ostvaruje tako što na `cout` „pošaljete“ `endl` ili string ”`\n`”. Uočite kako se štampa tekst u sljedećem primjeru.

```
#include <iostream>

using namespace std;
/*
Komentar u vise redova.
Obicno su to neka pojasnjenja o vasem programu.
*/

// Komentar u jednom redu

int main()
{
   cout << "Hello world!"; // prvi red
   cout << "Goran Sukovic" << endl; // endl je novi red
   return 0;
}
```

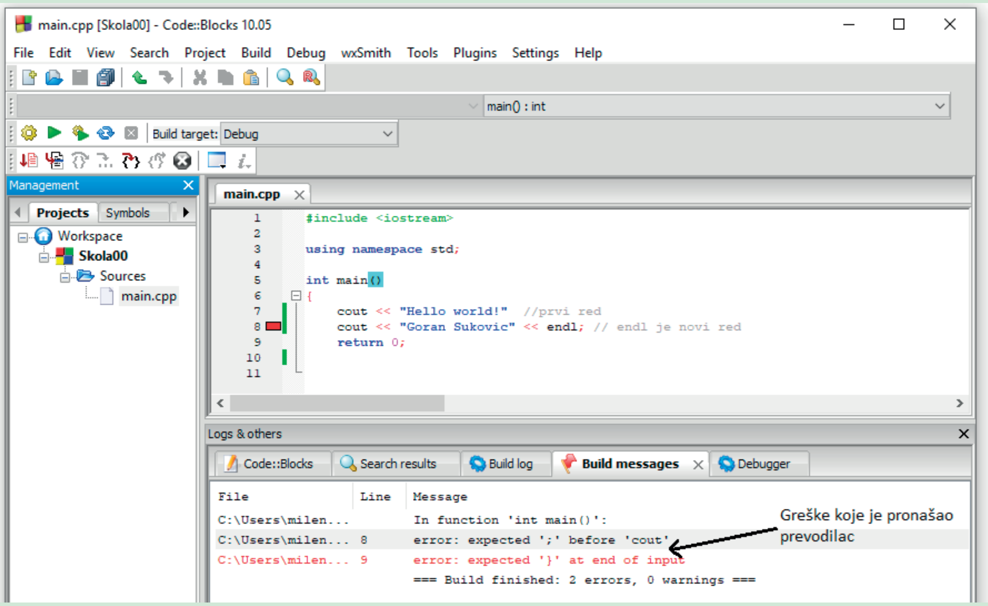
   e. U jednom redu izlaza štampan je tekst `"Helo World!Goran Sukovic"`, bez navodnika. Kako je prva naredba bila štampanje stringa `"Helo World!"` bez prelaska u novi red, sljedeće štampanje se nastavlja tamo gdje je prethodno završilo, tj. odmah iza simbola `"!"`.

f. Ako želimo da štampamo više stringova ili brojeva, moramo ih poslati jedan za drugim na `cout`. Npr, `cout<< "The" << "Rolling Stones" <<56` daje `"TheRolling Stones56"` (obratite pažnju na nedostatak razmaka). Ne zaboravite da poslije svake izmjene koda snimite sadržaj fajla (meni File->Save ili CTRL+S ili dugme na Toolbar-u) i da ga ponovo prevedete (Build), pa tek onda da ga pokrenete (Run).

g. Ako vaš program sadrži greške, CodeBlocks ih tokom operacije Build pronalazi i prijavljuje. Pogledajte sljedeći kod koji sadrži dvije greške (ako pažljivo pogledate kod uočićete da nedostaje simbol `";"` kod prvog štampanja i da nema zatvorene velike zagrade na kraju koda):

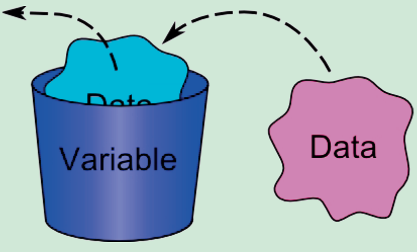
```
#include <iostream>
using namespace std;
int main()
{
    cout << "Hello world!" // prvi red
    cout << "Goran Sukovic" << endl; // endl je novi red
    return 0;
```

h. Donja slika prikazuje izgled okruženja poslije pokušaja prevođenja neispravnog programa:



i. Dvostrukim klikom na grešku (mjesto označeno strelicom na gornjoj slici), CodeBlocks vas vodi na mjesto u kodu gdje je greška nastala. U ovom slučaju greška je u liniji 8, a opis greške je sljedeći: `expected ';' before 'cout'`. U prevodu, nedostaje simbol `';'` prije simbola `cout`, tj. na kraju sedmog reda. Slično je i za drugu grešku.

3. Deklaracija promjenljivih, tip promjenljive
   a. Promjenljiva je ime za neku memorijsku lokaciju. Sadržaj te lokacije, tj. vrijednost promjenljive se mijenja tokom vremena. Dodjeljivanje nove vrijednosti promjenljivoj uništava njenu postojeću vrijednost (vidi sliku ispod).



   b. Kada vam treba promjenljiva, morate zatražiti memoriju koja će čuvati vrijednost te promjenljive. Računaru nije potrebna ista količina memorije za npr. jedan cio broj i jedan razlomljeni (realni) broj. Zbog toga morate navesti kakvog je tipa vrijednost koju želite čuvati u promjenljivoj. Dakle, morate navesti tip i ime promjenljive i moguće zadati njenu početnu vrijednost. Za cijele brojeve koristi se tip `int`, a za razlomljene (realne) brojeve tip `float` ili tip `double`.
   c. Vodite računa da je skup cijelih brojeva u računaru konačan, za razliku od matematike, gdje je on beskonačan. Takođe, razlomljeni brojevi se u računaru predstavljaju sa greškom. Razlomljeni brojevi se pišu sa decimalnom tačkom umjesto decimalne zapete. Npr. 3.54, 2.1245, –12.123. itd. Ne možete zapisati broj $2\frac{3}{4}$ direktno, već samo kao 2.75
   d. Primjeri zadavanja (deklaracije) promjenljivih:

```
int i, j, k;
double visina, sirina, m123, ugaoRotacije;
float f1, duzina, obimPravougaonika;
```

e. Ime promjenljive može biti niz slova i cifara koji obavezno počinje slovom. Velika i mala slova se razlikuju, pa su npr. `ana12` , `Ana12` i `anA12` različita imena promjenljivih.

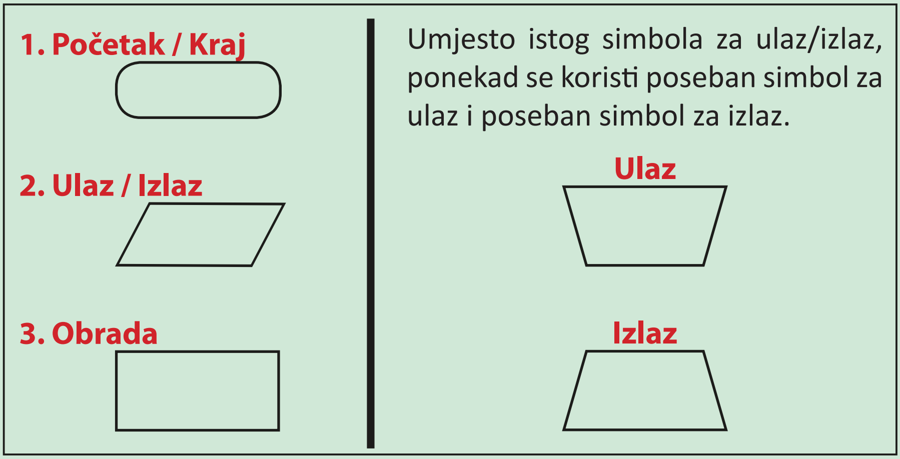
4. Naredba dodjeljivanja
   a. Opšti oblik naredbe je: `promjenljiva = izraz`
   b. Prvo se izračuna izraz, pa se njegova vrijednost dodijeli promjenljivoj. Promjenljiva prethodno mora biti deklarisana
   c. Simboli aritmetičkih operacija: sabiranje (+), oduzimanje (–), množenje (*), dijeljenje (/), moduo – ostatak pri dijeljenju (%)
   d. Primjer:

```
k = 32;
p = visina * sirina;
k = j/10 + k%10;
a = (i+j+5.62)*(h-1/2)- a/2;
obim = 2*visina + 2*sirina;
```

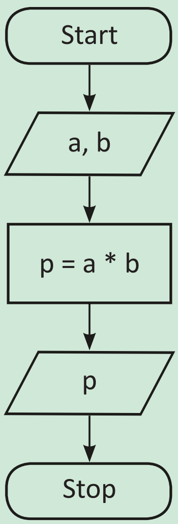
   e. Sve operacije se izvršavaju slijeva udesno, osim operatora dodjeljivanja koji se izvršavaju zdesna ulijevo. Npr. 7+4+8 se izračunava kao (7+4)+8.
   f. Vodite računa da ako su svi argumenti u izrazu cijeli brojevi, rezultat je takođe cio broj, čak i ako se koristi dijeljenje. Npr. 13/4 daje rezultat 3, a ne 3.25. Ako želimo tačan rezultat, moramo pisati 13.0/4 ili 13/4.0 ili 13.0/4.0. Obratite pažnju da je rezultat izraza 13/4*2.0 jednak 6.0 a ne 6.5.
5. Kreirati projekat ***Task001***. Napisati program koji učitava dužine stranice pravougaonika i štampa njegovu površinu.
   a. Algoritam je konačan niz instrukcija (operacija ili koraka) koji opisuju kako riješiti problem. Riječ algoritam (engleski ‘algorithm’) potiče od latinskog prevoda imena persijskog matematičara al-Khwārizmī (persijski: خوارزمی, 780–850). Napisao je knjigu o brojevima oko 825. godine koja je prevedena na latinski u dvanaestom vijeku pod naslovom „*Algoritmi de numero Indorum*“. Riječ „Algoritmi“ u naslovu je nastala kao prevod imena autora Al-Khwarizmi.
   b. Algoritmi se mogu zadati nizom instrukcija ili pomoću dijagrama toka (engleski „flow chart“). Ponekad se instrukcije zadaju pomoću tzv. pseudokoda.
   c. Opišimo algoritam na našem jeziku, zadajući ulaz, izlaz i korake koje treba izvršiti.

Ulaz: a, b – dužine stranica pravougaonika, a i b su pozitivni realni brojevi
Izlaz: *p* – površina pravougaonika
Algoritam:
1. učitati brojeve *a* i *b*
2. *p* = *a***b*
3. štampati *p*

d. Drugi način zadavanja algoritma je grafički, koristeći takozvani dijagram toka. Dio simbola za predstavljanje prikazan je na slici:



e. Algoritamska šema (dijagram toka) za naš zadatak:



f. Za učitavanje podataka u jeziku C++ koristi se objekat `cin`. Napišite program kao što je to urađeno niže, pokrenite program, unestie vrijednosti npr. 5 i 6 (tj. 5 6), pa pritisnite ENTER. Šta dobijate?

```
#include <iostream>

using namespace std;
int main()
{
          float a,b; // stranice pravougaonika
          float p;
          cin >> a >> b; // ucitavamo a i b
          p = a * b;
          cout << p << endl;
          return 0;
}
```

ZADACI ZA VJEŽBU

VI razred

I nivo

1. Iz datog skupa razlomaka $\left\{\frac{6}{5}, \frac{7}{11}, \frac{3}{4}, \frac{12}{7}, \frac{3}{8}, \frac{17}{6}, \frac{15}{4}, \frac{3}{7}, \frac{1}{3}\right\}$ izdvojiti podskupove pravih i nepravih razlomaka. Neprave razlomke prevesti u mješovite brojeve.
2. Uporediti razlomke: a) $\frac{4}{7}$ i $\frac{2}{7}$, $b)$ $\frac{5}{3}$ i $\frac{5}{2}$, $c)$ $\frac{2}{3}$ i $\frac{4}{5}$.
3. Izračunati:
   a) $\frac{4}{5}+\frac{3}{5}$; b) $\frac{9}{7}-\frac{3}{7}$; c) $\frac{3}{8}+\frac{1}{2}$; d) $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$; e) $\frac{5}{6}+\frac{7}{9}$; f) $\frac{7}{8}-\frac{1}{4}$; g) $\frac{5}{6}-\frac{3}{4}$;
   h) $\frac{11}{12}-\frac{3}{8}$; i) $2\frac{3}{4}+3\frac{2}{3}$; j) $4\frac{1}{2}-2\frac{2}{3}$.
4. a) Napisati u obliku decimalnog broja razlomke: $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{100}$, $\frac{27}{100}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{8}{25}$.
   b) Napisati u obliku razlomka brojeve: 0,7; 0,25; 0,84; 1,5; 1,05; 2,125.
5. Izračunati: a) $2{,}35+4{,}56$; $b)$ $0{,}05+1{,}4$; $c)$ $3{,}45-1{,}53$; $d)$ $4{,}6-2{,}37$;
6. $e)$ $\frac{1}{2}+1{,}3$; $f)$ $2{,}7-1\frac{1}{5}=$.
7. Zaokružiti na dvije decimale: 3,3072; 0,45137; 1,2783; 2,299; 3,035; 4,145.
8. Riješiti jednačine: a) $\frac{2}{5}+x=\frac{7}{10}$; b) $x-2{,}3=4{,}12$; c) $5-x=3{,}25$.
9. Riješiti nejednačine: a) $x+1\frac{1}{2}<3\frac{1}{2}$; b) $x-\frac{2}{3}>\frac{1}{6}$; c) $2{,}39-x\leq 1{,}3$.
10. Trougao ABC preslikaj osnom simetrijom u odnosu na pravu koja sa trouglom nema zajedničkih tačaka.
11. Trougao ABC preslikaj centralnom simetrijom u odnosu na tačku O koja se nalazi van datog trougla.

II nivo

1. Koje vrijednosti može imati promjenjiva x, tako da razlomak: a) $\frac{x}{7}$ буде прави; b) $\frac{9}{x}$ bude nepravi.
2. Razlomke dovesti na jednake imenioce, pa ih poređati od najmanjeg do najvećeg: $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{24}$.
3. Izračunati vrijednost izraza:
   a) $\left(12\frac{1}{2}-5\frac{3}{4}\right)-\left(3\frac{1}{6}+2\frac{1}{4}\right)$;
   b) $\left(15{,}375-8\frac{2}{3}\right)+\left(47\frac{5}{6}-32\frac{5}{12}\right)$;
   c) $12{,}75-\left(6\frac{5}{6}-4{,}5+\frac{2}{3}\right)$;
4. Od komada tkanine dužine 8,25 m sašivene su tri haljine. Za jednu je utrošeno $2\frac{3}{4}$ m, a za drugu 0,2 m manje nego za prvu. Koliko je materijala utrošeno za treću haljinu?
5. Masa lubenice i dinje je $5\frac{3}{4}$ kg, a lubenice i bundeve $7\frac{9}{10}$ kg. Odrediti njihove mase ako sve tri zajedno imaju masu za $1\frac{1}{2}$ kg manje od 10 kg.
6. Riješiti jednačine: a) $\left(x+4\frac{2}{9}\right)-4=11\frac{1}{4}$; b) $2\frac{3}{5}-\left(x+\frac{1}{3}\right)=1$.
7. Riješiti nejednačine: a) $\left(5{,}6-\frac{3}{4}\right)-x<12\frac{3}{5}-10\frac{1}{4}$; b) $1\frac{3}{4}+(7{,}5-x)\leq 7{,}25$.
8. Đorđina je prvog dana pročitala $\frac{3}{10}$ knjige, drugog dana $\frac{3}{7}$ ostatka, a trećeg dana poslednjih 20 stranica. Koliko stranica ima ta knjiga?
9. Ако od broja 18 одузмемо неки број увећан за 6,25, dobićemo broj manji od 10,3. Odrediti takve brojeve.
10. Neki bazen se napuni vodom kroz jednu cijev za 10 sati, a kroz drugu cijev za 6 sati. Pun bazen se isprazni kroz odvodnu cijev za 8 sati. Koji dio bazena će biti napunjen ako su sve tri cijevi istovremeno otvorene 1 sat?
11. Data su tjemena trougla ABC i tačka A'. Ако su A i A' osno simetrične tačke u odnosu na neku osu simetrije, preslikati preostala dva tjemena trougla u odnosu na istu osu simetrije.
12. Dat je četvorougao ABCD. Preslikati ovaj četvorougao osnom simetrijom u odnosu na pravu koja je simetrala ugla kod tjemena B.

Biljana Bajramović i Anđa Vojinović, JU OŠ „Pavle Rovinski“, Podgorica

VII razred

I nivo

1. Brojeve: $5\frac{2}{3}$; 0,1; $-\frac{3}{4}$; –2; 7 prikaži na brojevnoj pravoj i poređaj od najvećeg do najmanjeg.
2. Datim racionalnim brojevima: $-\frac{2}{3}$; $\frac{5}{9}$; $\frac{-7}{11}$; $\frac{2}{-5}$; $-\frac{1}{4}$ odrediti:

   a) suprotne brojeve i b) apsolutne vrijednosti.

3. Izračunati: a) $-(+10) - |-2\frac{3}{4}|$; b) $12{,}5 - |-4{,}25|$; c) $\frac{3}{8} \cdot |-2\frac{3}{8}| + (-10)$.

4. Izračunati vrijednost izraza, pa rezultate zapisati u obliku decimalnog broja:

a) $\frac{1}{5} + \frac{3}{20}$; b) $\frac{4}{25} - \frac{3}{50} + \frac{2}{5}$.

5. Izračunati: a) $2{,}25 - 5\frac{1}{4} + 3$; b) $-\frac{5}{6} + (\frac{1}{2} - \frac{5}{8})$; c) $+(-8\frac{2}{3}) + (-4{,}75) + (-1\frac{1}{3})$;

d) $-9 + (1\frac{2}{7} - \frac{6}{8})$.

6. Ako je $x = (3\frac{1}{6} - 4\frac{1}{3}) : \frac{5}{12}$ i $y = \frac{2}{3} : (3 - 4\frac{1}{4})$, izračunati: a) $5x + 7y$; b) $x \cdot y$ i c) $\frac{1}{2}x - 2y$.

7. Riješiti jednačine: a) $(x - \frac{1}{2}) - \frac{3}{4} = -\frac{7}{8}$; b) $2\frac{1}{3} + (1\frac{1}{5} - x) = 5$.

8. Riješiti nejednačine: a) $-\frac{2}{5} - (x + \frac{2}{3}) > \frac{7}{15}$; b) $(1\frac{5}{12} + 2\frac{2}{3}) - x \leq 3\frac{3}{4} - 4\frac{5}{6}$.

9. Koji broj uvećan za razliku brojeva $3\frac{7}{15}$ i $2\frac{1}{2}$ daje zbir $-12{,}4$?

10. Oko jednakostraničnog trougla stranice a = 5 cm opisati i u njemu upisati kružnicu. Zapisat šta uočavaš.

11. Konstruisati trougao sa stranicama a = 6 cm, b = 7 cm i c = 8 cm, pa mu odrediti težište i ortocentar.

II nivo

1. Odrediti uzastopne cijele brojeve između kojih je racionalan broj: a) $-\frac{1}{2}$; b) $-\frac{9}{4}$; c) $\frac{5}{4}$; d) $\frac{37}{3}$.

2. Uporediti brojeve dovodeći ih na zajednički:

a) brojilac: $-\frac{7}{18}, -\frac{2}{3}, -\frac{5}{9}, -\frac{17}{36}$; b) imenilac: $-\frac{5}{9}, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{7}, -\frac{20}{35}$.

3. Izračunati $|p| + |q|$, ako je:

a) $p = 0{,}2$ i $q = -3{,}5$; b) $p = -\frac{1}{3}$ i $q = 2\frac{1}{6}$; c) $p = -4{,}5$ i $q = \frac{3}{5}$.

4. Dati su racionalni brojevi: $-\frac{2}{5}$; 0,7; $-\frac{1}{4}$; -3; 2,5. Izračunati:

a) zbir najvećeg i najmanjeg broja; b) razliku zbira pozitivnih i zbir negativnih brojeva.

5. Riješiti jednačine: a) $(4{,}9 - x) + \frac{3}{5} = 8\frac{1}{2} - 1\frac{5}{6}$; b) $-5{,}8 - (x - 1\frac{3}{4}) = -2 + 1{,}4$.

6. Riješiti nejednačine: a) $-10 + 7\frac{7}{8} < x - (3{,}1 - 5\frac{1}{4})$; b) $4\frac{1}{3} - 2{,}5 + (x - 3\frac{1}{6}) \leq \frac{7}{18}$.

7. Neka je $m = -\frac{3}{5}$ i $n = 1{,}4$. Odrediti racionalan broj jednak: a) polovini njihovog zbira; b) razlici proizvoda i zbira tih brojeva; c) količniku zbira i razlike tih brojeva.

8. Izračunati vrijednost izraza: a) $\frac{1-\frac{1}{2}}{-2+\frac{1}{3}}-\frac{-\frac{3}{4}+2}{\frac{3}{4}+2}$; b) $\frac{\frac{3}{8}-1{,}5}{0{,}5+\frac{3}{8}}:\frac{1{,}75-\frac{4}{5}}{0{,}25+\frac{4}{5}}-4\frac{2}{9}:1\frac{1}{6}$

9. Ako neki broj uvećamo za razliku brojeva - $16\frac{3}{5}$ i $1\frac{5}{6}$ dobijamo zbir broja 8 i razlike brojeva 2,8 i – $4\frac{3}{5}$. Odrediti taj broj.

10. Konstruiši Δ MNP ako je stranica MN = 4 cm i tačka T - težište trougla van prave koja je određena tačkama M i N.

11. Pod kojim uglom se vide stranice trougla ABC iz centra upisane kružnice u taj trougao ako su α = 42° i β = 56°?

12. Data je kružnica k(O, 4 cm) i na njoj tačke B i C. Konstruisati pravougli trougao ABC kome je tjeme pravog ugla u tački C.

Ivana Ivanović, JU OŠ „Dr Dragiša Ivanović”, Podgorica

VIII razred

I nivo

1. Riješiti jednačine:

a) $\frac{4x}{3}+11=4-x$; b) $\frac{1}{3}(2x-7)=\frac{4x}{9}-7$; c) $\frac{3x-5}{3}+6\frac{1}{6}=\frac{3x+5}{2}$;

d) $3x-(15+2x-(5x+11))=2x-8$.

2. Dokazati da sledeće jednačine nemaju rješenja:

a) $\frac{2x-1}{3}-\frac{4-x}{2}=x+1+\frac{x-3}{6}$; b) $(y+1)^2+(y+2)^2+(y+3)^2+(y+4)^2=(2y+5)^2$.

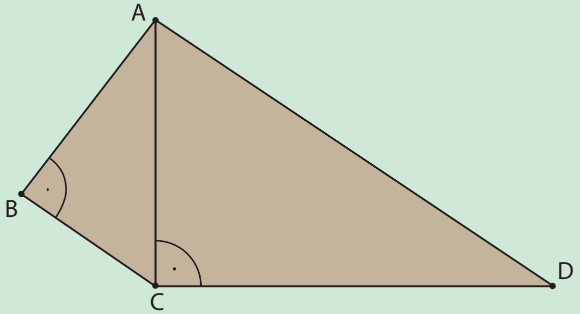
3. Zbir tri uzastopna neparna je broja je 717. Koji su to brojevi?

4. Riješiti nejednačine:

a) $3(2-x)-2(1-x)\geq 1-x$; b) $\frac{x-2}{3}-1\leq\frac{x-3}{5}$; c) $1-\frac{2x-5}{3}>x-\frac{1-x}{2}$; d) $-2<\frac{x-3}{2}<3$

5. Za koju vrijednost promjenljive x je vrijednost izraza $\frac{2x-5}{3}$ za 5 veća od polovine vrijednost binoma 1 – 3x.

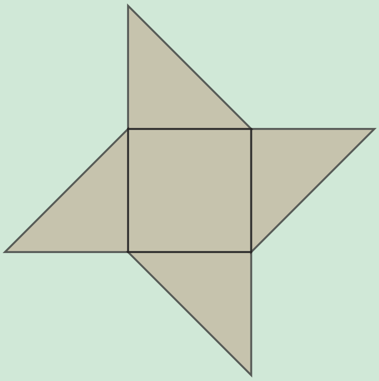
6. Izračunati dužinu stranice AB na slici:



7. Neka su $a = 4\sqrt{5}$ cm i b = 4cm stranice pravouglog trougla ABC. Odrediti treću stranicu tog trougla.

8. Ako je hipotenuza pravouglog trougla 15 cm i jedna kateta 9 cm, izračunati površinu tog trougla.

9. Figura na slici sastavljena je od jednog kvadrata i četiri podudarna jednakokrako-pravougla trougla. Izračunati obim te figure ako je njena površina 48 cm^2.



10. Pravougaonik ABCD ima povšinu 25 cm^2. Tačke E, F, G i H su redom središta stranica AB, BC, CD i AD. Kolika je površina četvorougla EFGH?

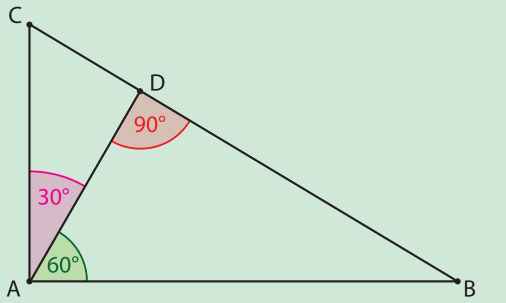
11. Kolika je površina osnove bazena za plivanje ako je njena dužina 24 cm, a dijagonala 30 cm?

II nivo

1. Riješi jednačine:
   a) $2|x| = 6$; b) $|x-1| = 1$; c) $-2|x-3| + 4 = 0$.
2. Odrediti vrijednost parametra k za koji su jednačine
   $(k + 2x)^2 + 17k^2 = 2(2x + 3k)^2 - 12kx^2 - 20k$ i
   $26x - (20 - 810 - 3x) - 7x = 30 - (3x + 7)$ ekvivalentne.
3. Zbir polovine, trećine i četvrtine nekog broja uvećan za 2 daje suprotan broj razlike $\frac{2}{3}$ tog broja i 0,5. Odrediti nepoznati broj.

4. Dijagonala jednakokrakog trapeza je dva puta duža od njegove srednje linije. Ako je visina trapeza $h = 12\sqrt{3}$ cm, izračunati površinu trapeza.

5. Izračunati obim i površinu trougla ABC sa slike ako je AC = 10 cm.



6. Riješiti jednačine:

a) $\frac{x(x-2)(x-3)}{x(x-3)}=0$; b) $\frac{2}{x}+\frac{1}{5x}-\frac{1}{3}=\frac{7}{5x}+\frac{7}{15}$; c) $\frac{7x+3}{7x+4}=\frac{5(x+1)}{5x-2}$.

7. Riješiti nejednačine:

a) $\left(x-\sqrt{3}\right)(2x-6)\geq 0$; b) $\frac{x+3}{2x+10}\leq 0$.

8. Katete pravouglog trougla date su jednačinama $9-\frac{a}{2}=1$ i $\frac{b}{3}+1=5$. Izračunati poluprečnik opisanog kruga tog trougla.

9. Izračunati površinu jednakokrakog trougla ako je zbir njegovih krakova 10 cm, a zbir osnovic i kraka je 11 cm.

10. Katete pravouglog trougla su 3 dm i 4 dm. Ako je tačka M u unutrašnjosti trougla i ako je udaljena od obje katete 5 cm koliko je udaljena od hipotenuze?

Vesna Matković, Sanja Popović, Miloš Gojačanin, Aleksandra Čejović
JU OŠ „Drago Milović“, Tivat

IX razred

I nivo

1. Zbir dva broja je 11, a razlika dvostruke vrijednosti jednog i trostruke vrijednosti drugog broja je 2. Odrediti proizvod tih brojeva.

2. Dat je sistem jednačina: $3x + 4y - 6 = 0$ i $3x - 2y + 12 = 0$. Riješiti sistem grafički i izvršiti provjeru računom.

3. Otac je tri puta stariji od ćerke. Osam godina ranije bio je pet puta stariji od nje. Koliko godina ima ćerka?

4. Prava $y = \boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}$ prolazi kroz tačke M(0, 3) i N(3, 0).

i) odrediti brojeve ***a*** i ***b***;

ii) u Dekartovom koordinatnom sistemu nacrtati dobijenu pravu;

ii) izračunaj površinu i obim figure koju obrazuju prava i koordinatne ose.

5. Riješi sistem jednačina: $\begin{cases}\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=\frac{1}{6}\end{cases}$ i $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=-3$.

6. Osnova prave piramide je pravougaonik obima 14 cm. Ako je visina piramide jednaka osnovnoj ivici dužine 4 cm, izračunati zapreminu piramide.

7. Površina omotača pravilne četvorostrane piramide je 60 cm^2, a površina cijele piramide je 96 cm^2. Odrediti zapreminu te piramide.

8. Pravilna četvotostrana piramida ima bazu površine 64 cm^2 i bočnu visinu 5 cm. Odrediti površinu dijagonalnog presjeka te piramide.

9. Izračunati površinu pravilne trostrane piramide kod koje je bočna ivica 12,5 cm i bočna visina 12 cm.

10. Odrediti površinu i zapreminu pravilne šestostrane piramide čija kraća dijagonala osnove ima dužinu $6\sqrt{3}$ cm, a površina jedne njene bočne strane je 18 cm^2.

II nivo

1. Odrediti vrijednost parametra p za koji je sistem jednačina $\begin{cases} 3(x-1)+2y=11p+4 \\ 2p+1=\frac{x}{2}+\frac{y}{3} \end{cases}$ neodređen. Za dobijenu vrijednost datog parametra odrediti sve parove prirodnih brojeva koji su njegova rješenja.

2. Pogodnom metodom riješiti sistem jednačina: $\begin{cases} (a-2)(b+1)+1=(a+3)(b+2) \\ (2a-3)(5b+7)-(5a-6)(2b+1)=0. \end{cases}$

3. Odrediti rješenja sistema: $\begin{cases} |a|+|b|=8 \\ 2|a|-3|b|=1. \end{cases}$

4. Brat i sestra imaju 35 €. Kad brat potroši $\frac{2}{3}$ svog novca, a sestra $\frac{7}{9}$ svog novca, ostaje im jednako novca. Koliko novca ima brat, a koliko sestra?

5. Razlika dva broja je 4, a razlika njihovih kvadrata je 356. Koji su to brojevi?

6. Zbir cifara dvocifrenog broja je 12. Podijelimo li taj broj razlikom cifara desetica i jedinica dobija se količnik 37 i ostatak 1. Koji je to broj?

7. Pravilni tetraedar ivice a presječen je sa ravni koja sadrži jednu ivicu tetraedra i polovi njoj suprotnu ivicu. Dokazati da se površina tog presjeka odnosi prema površini strane tetraedra kao $\sqrt{2} : \sqrt{3}$.

8. Osnova pirmide je kvadrat. Jedna bočna ivica normalna je na ravan osnove, a najduža bočna ivica ima dužinu 8 cm i gradi sa ravni osnove ugao od 45°. Odrediti zapreminu piramide.

9. Pravougli trougao ABC sa katetama AC = 9 cm i BC = 12 cm je osnova piramide SABC jednakih bočnih ivica SA = SB = SC = 19,5 cm. Odrediti zapreminu piramide SABC.

10. Površina pravilne šestostrane piramide je $30 \cdot (5\sqrt{3}+14)$ cm^2, osnovna ivica ima dužinu $\sqrt{\frac{(10^2)^3 \cdot (10^2)^2}{100^4}}$ cm. Odrediti visinu te piramide.

11. Visina pravilne trostrane piramide je $4\sqrt{3}\,cm$ i sa bočnom ivicom obrazuje ugao od $30°$. Izračunati površinu te piramide.

Mirjana Solujić, JU OŠ „Druga osnovna škola“, Budva

ZADACI ZA TESTIRANJE UČENIKA IX RAZREDA

1. Izračunti vrijednost izraza: a) $0{,}48 + 2{,}6 - 3{,}5$; b) $0{,}54 : 0{,}6 + 10 \cdot 0{,}22$;
   c) $\frac{5}{6} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$; d) $\frac{1}{2} - \frac{8}{5} : \frac{2}{5}\left(0{,}5 - \frac{1}{4}\right)$

2. Izračunati vrijednost izraza, za date vrijednosti promjenljivih:
   a) $\frac{5xy-1}{3x^2y}$, $x = -\frac{2}{3}$, $y = 3$;
   b) $\frac{x^9 \cdot x^5 : (x^5)^2}{x^5 \cdot x}$, $x = -0{,}2$;
   c) $ma - mb$, ako je $m = 7{,}5$, $a = 2\frac{1}{3}$ i $b = -1\frac{1}{5}$;
   d) $(3x - 2y)^2 - (2x - 3y)^2$, $x = 1{,}2$, $y = -0{,}2$

3. a) Odrediti 8% od 640; b) Odrediti broj čije $\frac{3}{4}$ iznose 9; c) Od kojeg broja 2% iznosi 96?

4. Za neki posao je konkurisalo 160 osoba. Od tog broja je 35% prošlo u uži krug, a njih 25% je dobilo posao. Koliko osoba je zapošljeno?

5. Riješiti jednačine: a) $3x - 2 = 5$; b) $\frac{x-2}{6} - \frac{5x+8}{12} = 1 - \frac{x}{2}$ i
   c) $\frac{(y-1)^2}{2} - \frac{(y-3)(2y-5)}{4} = 3 - (y - 2)$.

6. Odrediti skup rješenja nejednačina i prikaži ga na brojevnoj pravoj:
   a) $2x - 8 > 5x - 2 + x$; b) $3x - (2x + 5) \leq -4(3x - 2) + 7$ i
   c) $(x + 2)^2 - x(x - 3) \geq 3(x + 1)$

7. a) Sin je 18 godina mlađi od oca. Prije pet godina je bio četiri puta mlađi od oca. Koliko godina imaju sada otac i sin?
   b) U dvocifrenom boju cifra desetica je dva puta manja od cifre jedinica. Kada cifre zamijene mjesta dobija se broj koji je za 18 veći od početnog. Koji je to broj?

8. Riješiti sisteme linearnih jednačina:
   a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 7 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3(a - b) - 4b = 1 \\ a - 2(a - 2b) = 3 \end{cases}$; c) $\begin{cases} \frac{x+2}{6} - \frac{x-4}{2} = \frac{y}{3} \\ \frac{4}{3}(x - 1) - 2y = -2 \end{cases}$

9. a) Površina pravouglog trougla je $24\ cm^2$. Naći njegov obim ako jedna njegova kateta ima dužinu 8 cm.

b) Obim jednakokrakog trougla je 36 cm, a njegov krak je za 3 cm duži od osnovice. Izračunati njegovu površinu.

10. a) Uglovi trougla se odnose kao 2:1:3. Odrediti njihove veličine.

b) Janko i Enis dijele zaradu u razmjeri 3:2. Ako je Janko dobio 150 €, koliko su novca zaradili?

11. Nacrtati grafik funkcije i naći površinu trougla kojeg ona gradi sa koordinatnim osama:

b) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$; b) $3x + 2y - 6 = 0$

12. a) Obim kruga ima dužinu 4π cm. Izračunati njegovu površinu.

b) Krug ima površinu $9\pi\ cm^2$. Izračunati njegov obim.

c) Izračunati obim i površinu kružnog isječka koji odgovara centralnom uglu od 75° i poluprečniku 4 cm.

d) Izračunati površinu kružog prstena, određenog opisanom i upisanom kružnicom jednakostraničnog trougla čiji je obim $6\sqrt{3}$cm.

13. Spoljašnji ugao na osnovici jednakokrakog trougla je za 40° veći od susjednog unutrašnjeg ugla. Da li je osnovica duža od kraka? Naći ugao između visine, povučene iz vrha trougla, i simetrale jednog od uglova na osnovici.

14. Kod pravilnog mnogougla je $D_n = 44$. Izračunati S_n.

15. Dokazati da jednakim tetivama jednog kruga odgovaraju isti centralni uglovi.

16. Naći zapreminu pravilne trostrane prizme, čija je površina osnove $9\sqrt{3}\ cm^2$, a visina je četiri puta veća od osnovne ivice.

17. Osnova prave prizme je romb sa dijagonalama dužina 24 mm i 32 mm. Izračunati površinu te prizme ako je njena visina 32 mm.

18. Mrežu jednakoivične trostrane piramide čini jednakostraničan trougao stranice 6 cm. Naći njenu površinu i zapreminu.

19. Omotač pravilne šestostrane piramide ima površinu $300\ cm^2$. Izračunati površinu i zapreminu te prizme ako je dužina njene apoteme 10 cm.

20. Čelični stub oblika pravilne četvorostrane prizme završava se sa piramidom. Izračunati njegovu masu ako je osnovna ivica prizme 6 dm, bočna ivica prizme 8 dm, a bočna ivica piramide 45 cm ($\rho = 7{,}8\frac{g}{cm^3}$).

Aleksandra Vuković, JU OŠ „Milan Vukotić“, Golubovci

ODABRANI ZADACI

VI razred

1. Jedna slavina napuni bazen za 5, a druga za 8 sati. Kada će biti više vode u bazenu: kada je prva otvorena 2, ili druga 3 sata?

2. Dešifruj sabiranje, gdje su A, B, C i D različiti jednocifreni brojevi: $\frac{A}{B}+\frac{A}{C}+\frac{A}{D}=\frac{177}{70}$.

3. U dva suda ukupno ima $13\frac{1}{2}$ litara vode. Ako iz prvog suda prelijemo u drugi $\frac{3}{4}$ litara vode, tada će u oba suda biti jednake količine tečnosti. Koliko vode ima u svakom od ta dva suda?

4. Izračunati vrijednost izraza: $\left(1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}\right)\cdot 7!$

VII razred

1. Konstruisati pravougli trougao čiji je jedan ugao 60°, a zbir kateta 9 cm.

2. Na proslavi rođendana se okupilo jedanaestoro djece. Da li je moguće da svako od njih poznaje tačno petoro djece? A četvoro?

3. Nad stranicama kvadrata ABCD spolja su konstruisana četiri jednakostranična trougla: ABM, BCN, CDP i ADQ. Dokazati da je četvorougao MNPQ kvadrat!

4. Ako je kod trougla $\alpha - \beta = 3\gamma$, koliko je $\alpha - \gamma$?

VIII razred

1. Za koju vrijednost promjenjivih x i y izraz: $x^2 + 4y^2 - 2x - 12y + 15$ ima najmanju vrijednost?

2. Riješiti jednačinu: $10^5 - x = 10^4 \cdot (555^2 - 554\cdot 556)$.

3. Visina koja odgovara osnovici jednakokrakog trougla je 20 cm, a visina koja odgovara kraku je 24 cm. Izračunati obim tog trougla.

4. Uglovi na osnovici nekog trapeza su komplementni. Izračunati obim i površinu tog trapeza ako je a = 17 cm, b = 12 cm, i jedan krak 4 cm.

IX razred

1. Pravougli trougao sa katetama 6 cm i 8 cm je osnova piramide, čije su sve bočne strane nagnute prema ravni osnove pod uglom od 60°. Izračunaj P i V te piramide.

2. Pravilna četvorostrana piramida kod koje je a = H = 8 cm presječena je s ravni koja sadrži apoteme dvije susjedne bočne strane piramide. Izračunaj površinu tako dobijenog presjeka.

3. Izračunati vrijednost izraza $|x + y|$, ako su x i y brojevi za koje važi: $\frac{2}{x}-\frac{2}{y}=1$ i $y - x = 1$.

4. Proizvod godina starijeg brata i mlađe sestre je 18, a zbir kvadrata njihovih godina 45. Koliko godina ima brat, a koliko sestra?

KONKURSNI ZADACI

VI razred

1. U prodavnici ima 300 kg čokoladnih, gumenih i šećernih bombona. Kada se proda $\frac{1}{2}$ čokoladnih, $\frac{2}{3}$ gumenih i $\frac{4}{5}$ šećernih bombona, u radnji ostaju jednake količine. Koliko je bilo od svake vrste bombona?

2. Tri brata Ljubo, Bane i Duško treaba da podijele izvjesnu količinu novca. Prvi je naišao Ljubo, uzeo svoju trećinu novca i otišao. Zatim je naišao Bane, i misleći da je on prvi, uzeo trećinu preostalog novca i otišao. Poslednji je naišao Duško i postupio kao i ostala braća – uzeo trećinu preostalog novca i otišao. Koliko je novca bilo ako je posle Duškovog odlaska na stolu ostalo 592 eura?

VII razred

1. Dokazati da je: $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{2005\cdot 2007}<\frac{1}{2}$.

2. Konstruisati ΔABC ako je $|AB|=5cm$, $|BA'|=1,5cm$ i $|BB'|=4cm$, gdje su A' i B' podnožja visina trougla konstruisanih iz tjemena A i B.

VIII razred

1. Da li postoji trocifren broj koji je jednak proizvodu svojih cifara?

2. Dokazati da je površina trapeza jednaka proizvodu kraka i rastojanja tog kraka od središta drugog kraka.

IX razred

1. Kvadrat stranice a predstavlja mrežu trostrane piramide. Izračunati zapreminu te piramide u funkciji od a.

2. Automobil je prevalio rastojanje od grada A do grada B za 5 sati, a u obrnutom smjeru od grada B do grada A za 4 sata. Pri tom se uzbrdo kretao brzinom 60 km/h, po ravnom putu brzinom 72 km/h i nizbrdo brzinom 90 km/h. Koliko je rastojanje od grada A do grada B?

Vesna Matković, Sanja Popović, Miloš Gojačanin, Aleksandra Čejović,
JU OŠ „Drago Milović“, Tivat

RJEŠENJA KONKURSNIH ZADATAKA IZ PROŠLOG BROJA

VI razred

1. Tri druga su zajedno imala 36 eura. Odlučili su da kupe loptu, pa je prvi dao 6, drugi 8 a treći 4 eura. Ispostavilo se da su im posle kupovine ostale jednake sume novca. Koliko je novca imao svaki od drugova prije kupovine lopte?
2. Šta je veće: $\frac{3*5*}{36}$ ili $\frac{5*3*}{45}$, ako umjesto zvjezdica mogu da stoje bilo koje cifre?

Rješenja:

1. Označimo sa a b i c redom svote novca koju imaju prvi, drugi i treći prijatelj prije kupovine. Iz uslova zadatka vidimo da je a + b + c = 36. Takođe, iz uslova da je poslije kupovine preostala svota novca kod sva tri prijatelja jednaka (označićemo je sa x) imamo da je: a – 6 = x, slijedi da je a = x + 6; b – 8 = x, odakle slijedi da je b = x + 8 i c – 4 = x, odakle dobijamo da je c = x+4. Zamjenom novodobijenih vrijednosti umjesto a, b i c dobijamo: (x + 6) + (x + 8) + (x + 4) = 36, odakle se dobija da je x = 6. Sada izračunamo: a = 6 + 6 = 12, b = 6 + 8 = 14 i c = 6 + 4 = 10. Dakle, prijatelji su prije kupovine imali 12, 14 i 10 eura.
2. Ako se prvi razlomak proširi sa 5, a drugi sa 4 dobija se $\frac{3*5*\cdot 5}{180}$ odnosno $\frac{5*3*\cdot 4}{180}$. Kako je brojilac prvog razlomka uvijek manji od 20000, a brojilac drugog uvijek veći od 20000, to je prvi razlomak uvijek manji od drugog.

VII razred

1. Bazen može da se napuni iz cijevi A za 40 sati. Cijev B je većeg otvora, pa se pod istim uslovima bazen kroz nju puni za upola kraće vrijeme. Za koliko vremena će se napuniti taj bazen ako se istovremeno otvore obje cijevi i ako se kroz cijev B zbog većeg pritiska uliva vode za $\frac{1}{6}$ više od predviđene količine?
2. Koliko sati pokazuje časovnik ako se zna da su se kazaljke poklopile i da se nalaze između 7 i 8 sati.

Rješenja:

1. Kako se čitav bazen kroz cijev A puni za 40 h, to se za 1 h kroz tu cijev napuni $\frac{1}{40}$ bazena. Po uslovu, cijev B puni bazen pod normalnim uslovima za (40 h) : 2, odnosno za 20 h. Međutim, kako se u zadatku kaže da se zbog povećanog pritiska uliva za $\frac{1}{6}$ više vode nego pod normalnim uslovima, zaključujemo da se tada iz cijevi B za 1 sat napuni $\frac{1}{20}+\frac{1}{6}*\frac{1}{20}=\frac{7}{120}$ dio bazena. Označimo sa t potrebno vrijeme da obje cijevi napune bazen. Tada formiramo jednačinu $(\frac{1}{40}+\frac{7}{120})t = 1$, odakle se dobija rješenje t = 12 h. Dakle, pod datim uslovima cijevi A i B će bazen zajedno napuniti za 12 časova.
2. Označimo sa x broj minuta, za koliko je prošlo 7 sati kada su se kazaljke poklopile. Ako uzmemo da je početni položaj sata bio u tačno 7 sati, mala kazaljka je svoj put do poklapanja prešla za x vremena, dok je velika svoj put prešla za 35 minuta do podeoka 7 h i dodatnih $\frac{x}{12}$ do poklapanja (Na pitanje zašto baš $\frac{x}{12}$ možemo odgovoriti zaključkom - jer

se velika kazaljka kreće 12 puta brže, pa je put od 7 do poklapanja prešla za 12 puta brže nego mala kazaljka). Odavde, izjednačavajući vrijeme, dobijamo da je $x = 35 + \frac{x}{12}$, odakle slijedi da je $x = 38\frac{2}{11}$ minuta. Dakle, sat pokazuje tačno 7 časova i $38\frac{2}{11}$ minuta.

Napomena: Zadatak se može riješiti i pomoću uglova između kazaljki u određenim trenucima.

VIII razred

1. a) Polinom $P(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9$ rastaviti na proste činioce.
   b) Dokaži da je dati polinom djeljiv sa 8 za svako neparno x.
2. Odredi sva cjelobrojna rješenja jednačine $x^2 = y^2 + 2017$.

Rješenja:

1. a) Polinom P(x) rastavljamo sledećim transformacijama:
   $P(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9 = x^3 - x^2 + 6x^2 - 6 + 3x - 3 = x^2(x - 1) + 6(x^2 - 1) + 3(x - 1) = x^2(x - 1) + 6(x - 1)(x + 1) + 3(x - 1)$. Izdvajanjem zajedničkog faktora $x - 1$ dobijamo:
   $P(x) = (x - 1)(x^2 + 6x + 9) = (x - 1)(x + 3)^2$
   b) Znamo da se neparni brojevi mogu zapisati u obliku $2k + 1$, pa zamjenom tog izraza umjesto x imamo:
   $P(x) = (2k + 1 - 1)(2k + 1 + 3)^2 = 2k(2k + 4)^2 = 2k(4k^2 + 16k + 16) = 4 \cdot 2k(k^2 + 4k + 4) = 8k(k^2 + 4k + 4)$, čime je dokazana djeljivost polinoma sa 8, za svako neparno x.
2. Prebacimo y^2 sa desne na lijevu stranu pa dobijamo $x^2 - y^2 = 2017$, odnosno $(x-y)(x+y) = 2017$. Kako je 2017 prost broj, datu jednačinu možemo razviti na 4 sistema
   a) $x - y = 1$ i $x+y = 2017$, odakle se dobija da je $x = 1009$, a $y = 1008$,
   b) $x - y = 2017$ i $x+y = 1$, odakle se dobija da je $x = 1009$, a $y = -1008$,
   c) $x - y = -1$ i $x+y = -2017$, odakle se dobija da je $x = -1009$, a $y = -1008$ i
   d) $x - y = -2017$ i $x+y = -1$, odakle se dobija da je $x = -1009$, a $y = 1008$.
   Dakle, rješenja ove jednačine su uređeni parovi $(x, y) \in \{(1009, 1008), (1009, -1008), (-1009, -1008), (-1009, 1008)\}$

IX razred

1. Odrediti sva cjelobrojna rješenja jednačine $3x + 7y = 89$.
2. Naći f(x) ako je $f(x - 1) = 4x - f(2) - 2$.

Rješenja:

1. Izvršimo transformaciju: $3x + 7y = 89 \Rightarrow 3x = 89 - 7y \Rightarrow x = \frac{89-7y}{3} \Rightarrow x = \frac{87-6y+2-y}{3} \Rightarrow x = 29 - 2y - \frac{y-2}{3}$. Da bi x bilo cjelobrojno kako se u zadatku traži, to $y - 2$ mora biti djeljivo sa 3, odnosno $y - 2 = 3k$ (gdje je k cio broj), odakle je $y = 3k + 2$. Zamjenjujući umjesto y novodobijenu vrijednost dobijamo da je $x = 25 - 7k$. Dakle, rješenja ima beskonačno mnogo, ali ih sve možemo objediniti uređenim parom $(x, y) = (25 - 7k, 3k + 2)$ gdje je k, kako je već napomenuto, cio broj.
2. Prvo što treba uraditi jeste izračunati vrijednost f(2), a to ćemo uraditi tako što ćemo za x uzeti vrijednost 3. Tada dobijamo: $f(3 - 1) = 4\cdot 3 - f(2) - 2$, odnosno $f(2) = 10 - f(2)$, odakle dobijamo da je $f(2) = 5$. Sada početna funkcija poprima oblik $f(x - 1) = 4x - 5 - 2 = 4x - 7$. Kada umjesto x uzmemo vrijednost $x + 1$ dobijamo: $f(x + 1 - 1) = 4(x + 1) - 7$, to jest $f(x) = 4x - 3$.

PRIPREMA ZA ČAS

Nastavni predmet	Matematika
Razred	VI
Nastavna tema	Razlomci
Nastavni sadržaj	Množenje i dijeljenje razlomaka.
Tip časa	Utvrđivanje
Oblici rada	Frontalni, individualni, grupni rad
Metode rada	Kombinovana metoda (dijaloška, samostalni rad učenika i rad u grupi)
Nastavna sredstva	Tabla, kreda, računar, projektor, nastavne kartice, nastavni listići
Ishodi učenja	***Obrazovni:*** • Učenici treba da obnove znanja o množenju i dijeljenju razlomaka, da stečena znanja primjenjuju u rješavanju računskih izraza. ***Vaspitni:*** Učenici treba da: • razvijaju pažnju i koncetraciju, • razvijaju timski duh, osjećaj pripadnosti timu, • razvijaju samopouzanje kroz iznošenje mišljenja i ličnog stava, • razvijaju povjerenje, • sposobnost prenošenja i podjele znanja sa drugima • razvijaju želju i uvide mogućnost za traženjem pomoći od drugih • izgrađuju kritičko mišljenje o svom, kao i o radu drugih.

Uvodni dio časa

Kroz „igru“ LANAC ZNANJA ponavljamo tehniku usmenog množenja razlomaka, koja će nam biti neophodna pri rješavanju složenijih algebarskih izraza.

Najpre treba pripremiti kartice, po jednu za svakog učenika. Na kartici je sa jedne strane odgovor, a sa druge strane pitanje, ali to pitanje i taj odgovor nisu povezani. Postoji jedna kartica samo sa pitanjem (ona započinje lanac) i jedna kartica samo sa odgovorom (ona završava lanac). Kartice osmisliti tako da odgovori na njima nisu isti, kako se ne bi javilo više učenika na jedno pitanje. Svi moraju pažljivo da slušaju i učestvuju, kako se igra ne bi prekinula.

Kartice mogu izgledati ovako:

•9	•36	•$\frac{1}{3}$
Odredi polovinu broja 72	Odredi $\frac{3}{4}$ od 12	Izračunaj $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{9}$

Glavni dio časa

Nakon ove „igre” učenici se prema pokazanom znanju dijele u grupe. Treba formirati četiri grupe od po 6 učenika, tako da nastavnik imenuje vođu grupe. Vođa grupe je učenik koji dobro razumije zadatke, vješto organizuje rad i pomaže članovima grupe u rješavanju zadataka. Grupe sastaviti tako da pored vođe grupe postoji bar još jedan učenik koji će, takođe, pomagati ostalim članovima.

Nakon podjele učenika u grupe i podjele uloga, učenici dobijaju zadatke, različite za svakog člana grupe. Svaki učenik samostalno rješava zadatak koji je, na osnovu procjene vođe, u mogućnosti da riješi. Nakon samostalnog rješavanja zadataka, učenici komentarišu kako su riješili svoje zadatke i provjeravaju rješenja zadataka ostalih članova grupe. Zajednički pronalaze i ispravljaju greške. Tačna rješenja vođa grupe prikuplja i u donju tabelu upisuje slovo iza tekstualnog zadatka ispod broja koji je rešenje zadatka. Grupa učenika koja najbrže tačno popuni svj dio tabele biva pohvaljena.

Rešenje ove tabele je izreka pitagorejaca BROJEVI UPRAVLJAJU SVIJETOM.

Završni dio časa

Nastavnik učenicima zadaje domaći zadatak. Ako ostane još nekoliko minuta učenicima možemo ispričati još neke interesantne činjenice o brojevima (prijateljski brojevi, savršeni brojevi).

Prilog

Vođa grupe	$\frac{3}{4}\cdot 1\frac{1}{3}+(4-(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}:\frac{1}{4}))$	**U**
Prvi član tima	$29-(5\frac{3}{5}:\frac{2}{5}+\frac{5}{2}:\frac{1}{2})$	**I**
Drugi član tima	$7\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{5}:\frac{21}{10}$	**R**
Treći član tima	$6\frac{1}{2}+6\cdot\frac{3}{4}$	**A**
Četvrti član tima	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}:\frac{1}{3}$	**E**
Peti član tima	$\left(\frac{1}{4}+\frac{4}{8}\right):2$	**V**

Vođa grupe	$14-3\cdot(\frac{4}{3}:4+5\frac{5}{6}:1\frac{3}{4})$	**J**
Prvi član tima	$16-10\cdot 1\frac{3}{10}+\frac{1}{2}:\frac{1}{4}$	**U**
Drugi član tima	$\left(7\frac{8}{9}-4\frac{5}{12}\right):2\frac{41}{42}$	**O**
Treći član tima	$2\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}-6\cdot\frac{1}{30}$	**V**
Četvrti član tima	$\frac{3}{4}-\frac{1}{3}:\frac{7}{9}$	**I**
Peti član tima	$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\cdot 2$	**R**

Vođa grupe	$\frac{3}{4}\cdot 1\frac{1}{3}+(4-(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}:\frac{1}{4}))$	**O**
Prvi član tima	$\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\right):6+\frac{19}{40}$	**J**
Drugi član tima	$1\frac{1}{3}\cdot 2\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{11}:3\frac{1}{3}$	**V**
Treći član tima	$\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$	**E**
Četvrti član tima	$(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}):\frac{1}{3}$	**P**
Peti član tima	$\left(1\frac{1}{4}+3\frac{1}{2}\right):2$	**M**

Vođa grupe	$11+(5-\left(\frac{5}{6}\cdot 3+\frac{1}{2}:\frac{1}{4}\right))2$	**B**
Prvi član tima	$11+(5-\left(\frac{5}{6}\cdot 3+\frac{1}{2}:\frac{1}{4}\right))2$	**S**
Drugi član tima	$5\frac{1}{7}:\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right):20$	**T**
Treći član tima	$3\frac{5}{6}-1\frac{2}{5}:\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)$	**A**
Četvrti član tima	$(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}):\frac{7}{9}$	**J**
Peti član tima	$\left(2\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\cdot 4$	**LJ**

2 0	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{2}{5}$	1 0		$3\frac{11}{12}$	$2\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$1\frac{5}{6}$	$\frac{4}{15}$	7	1 1	$\frac{3}{4}$	5		0	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{28}$	8	2	$\frac{4}{7}$	$4\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{8}$

Izreka pitagorejaca.

Snežana Boljević, JU OŠ „Pavle Rovinski“, Podgorica

Dr Vladimir Drekalović

O PISA TESTIRANJU IZ OBLASTI MATEMATIKE (2. dio)

U prošlom broju *Dijagonale* smo dali neke osnovne podatke koji se odnose na PISA testiranje. Napomenuli smo ko ga organizuje, s kojim ciljem, te koje zemlje posredstvom svojih đaka učestvuju u njemu. Napravili smo i jednu grubu klasifikaciju zadataka koji se na Testu pojavljuju. U prošlom broju smo naveli tri tipa zadataka. Ovaj put ćemo navesti još tri tipa zadataka za koje nam se čini da bi ih bilo vrijedno izdvojiti. Naravno, time ne smatramo da je tipizacija zaokružena, tim prije što se na svakom novom testiranju pojavljuju zadaci koji u određenom smislu donose različite vrste novina.[1]

Konkretna situacija i tabelarni prikaz

U sprintu, atletskoj disciplini, se pod *reakcionim vremenom* trkača podrazumijeva vrijeme koje protekne od trenutka kad starter zapuca pa do trenutka kad trkač napusti startno postolje. Konačno vrijeme trkača uključuje i reakciono vrijeme i vrijeme trčanja.

U prvoj tabeli je dato reakciono vrijeme i konačno vrijeme 8 sprintera. Popuni drugu tabelu.

Staza	Reakciono vrijeme (u sekundama)	Konačno vrijeme (u sekundama)
1	0.147	10.09
2	0.136	9.99
3	0.197	9.87
4	0.180	nije završio trku
5	0.210	10.17
6	0.216	10.04
7	0.174	10.08
8	0.193	10.13

1 Posljednje PISA testiranje je organizovano 2018. godine, a rezultati sa tog testiranja će biti objavljeni krajem 2019. godine.

Medalja	Staza	Reakciono vrijeme	Konačno vrijeme
Zlato			
Srebro			
Bronza			

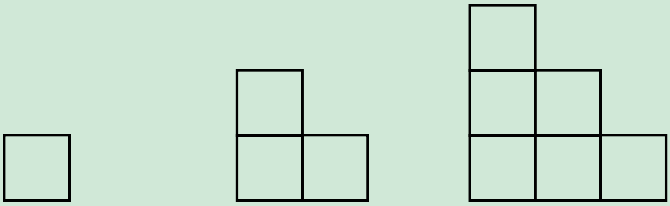
Prema dosadašnjim podacima, nijedan čovjek nije u mogućnosti da reaguje na starterov pucanj za manje od 0.110 sekundi. Ako je registrovano reakciono vrijeme trkača manje od 0.110 sekundi onda se start smatra neuspješnim jer je trkač morao startovati prije pucnja. Da je osvajač bronzane medalje imao manje reakciono vrijeme da li bi imao šanse da osvoji srebro? Odgovor obrazložiti.

Riječ je o zadatku koji je sasvim praktično orjentisan, vezan za sport koji je popularan. Onome ko rješava zadatak se skreće pažnja na praktičnu veličinu koja često odlučuje pobjednika u ovoj disciplini, a o čemu gledaoci koji prate atletiku obično ništa ne znaju (reakciono vrijeme). U ovom tipu zadatka imamo par zahtjeva koji su veoma različiti po složenosti. Prvo, očekuje se da učenik u tabeli, koja je popunjena data na početku zadatka, prepozna i uporedi određene veličine koje su bitne za zadatak, te da na osnovu toga popuni drugu tabelu. Drugi dio zadatka je nešto teži. Naime, iako je u njemu potrebno samo iskoristiti operaciju sabiranja i napraviti jedno upoređivanje, njegovu težinu čini zahtjev o izdvajanju brojeva koje treba sabrati/oduzeti i uporediti. Metodički zahtjev o odvajajnju bitnog od nebitnog, koji se u pedagoškoj literaturi ponekada koristi tek kao floskula bez objašnjenja i ilustracije, u ovom zadatku PISA testiranja pokazuje svoj pravi značaj.

Nastavi niz

Mirko, po njemu poznatom obrascu, pravi figure. Za prvu figuru je koristio

1 pravougaonik, za drugu 3, a za treću 6 pravougaonika. Koliko pravougaonika će mu biti potrebno za četvrtu figuru?[2]



Stage 1 Stage 2 Stage 3

Ovaj tip zadatka nećemo često naći u udžbenicima koji se koriste u našem obrazovnom sistemu. Međutim, radi se o zadatku sa kojim su se učenici lako mogli sresti u različitim dječjim ili enigmatskim časopisima koje čitaju u slobodno vrijeme. Iako je tekstom zadatka sugerisano da je osnova za rješenje, prije svega, numerička očekivati je da će učenici nakon posmatranja prethodne slike u rješavanju zadatka prije posegnuti za crtanjem naredne figure, a zatim i prebrojavanjem pravougaonika koji tako dobijenu figuru čine.

Isplativost

Picerija služi dvije vrste pica iste debljine ali različite veličine. Manje imaju prečnik 30 cm i koštaju 30 zed-a.[3] Veće imaju prečnik 40 cm i koštaju 40 zed-a. Koju picu je isplativije kupiti? Objasni odgovor.

Ovaj zadatak, kao i njemu prethodni, nema mnogo „ulaznih" podataka, niti dodatnih detalja koji bi nam u njegovom rješavanju mogli otežati situaciju time što bismo morali da odvajamo bitne od nebitnih podataka. Sasvim je jasno i direktno formulisan. On je ujedno odličan primjer zadatka koji u pravom svijetlu odražava duh PISA testiranja – praktično-ekonomska upotrebljivost matematike. Jedan očekivani način rješavanja ovog zadatka, imajući u vidu naš obrazovni sistem, jeste da se kod obje pice dođe do cijene iste površine/jedinice mjere. Tako bi se, na primjer, mogla izračunati površina svake od pica, a zatim bi dijeleći cijenu pice sa njenom površinom dobili cijenu jedne jedinice mjere, u oba slučaja. Nakon upoređivanja ta dva broja dobili bismo traženi odgovor.

---

2 66% đaka iz OECD zemalja je rješilo korektno ovaj zadatak.

3 *Zed* je izmišljena novčana jedinica koja se koristi u PISA zadacima u kojima se pojavljuju cijene određenih artikala.

Mr Radomir Božović

PITAGORA

Pitagora je bio antički grčki filozof i prvi istinski matematičar, a danas je njegovo ime jedno od najpoznatijih u istoriji matematike. Većina podataka o njemu se smatra nepouzdanim jer je sakupljena tek nakon njegove smrti. **Čak se godine njegovog rođenja i smrti ne smatraju potpuno pouzdanim.**

Rani život Pitagore

Rođen je oko 570. godine prije nove ere na grčkom ostrvu Samosu. Kao dijete je mnogo vremena proveo putujući sa svojim ocem Mnesarhom, koji je po zanimanju bio trgovac. Sa 18 godina je posjetio Milet, grčki grad na zapadnoj obali Male Azije, gde je upoznao Talesa (pisali smo o njemu u prošlom broju), prvog poznatog grčkog filozofa i naučnika. Tales je u to vrijeme bio prilično star, pa je malo vjerovatno da je podučavao Pitagoru. Umjesto toga, smatra se da je samo njihovo upoznavanje uticalo na Pitagorino zanimanje za matematiku i astronomiju. Poslušavši Talesov savjet, Pitagora kreće na putovanja, prije svega sa željom da istraži Egipat. Tamo su ga podučavali mnogi ugledni profesori i filozofi, ali i egipatski sveštenici.

Rad

Oko 530. godine p.n.e. preselio se u grad Kroton u južnoj Italiji, gdje je nedugo potom osnovao filozofsku i religioznu školu, koja je odmah privukla veliku pažnju. Takođe, osnovao je i vodio društvo, poznato kao pitagorejci. Članovi ovog društva su živjeli zajedno, poštujući striktna pravila, a Pitagora je podučavao svakog člana ponaosob. O njegovom radu se ne zna mnogo ili zbog striktnih pravila tajnosti ili zato što je teško razdvojiti njegov rad od rada njegovih sledbenika.

Prvi ozbiljniji procvat kulture, u užem smislu, kako se ona danas shvata, Grci su doživjeli duž obala Male Azije, kao i na jugu Italije. Najznačajnija dostignuća nauke i kulture iz tog perioda vezuju se za Talesa i Pitagoru. Obojica su svoja znanja sticali putujući po Egiptu i Mesopotamiji. Medjutim, za razliku od Mesopotamaca i Egipćana (čija su znanja iz matematike, astronomije i građevinarstva bila značajna), koji su postavljali samo pitanje: „kako se to radi?“, Grci su počeli postavljati pitanje: „zašto se to tako radi?“. Na taj način su napravili suštinski iskorak ka ozbiljnom zasnivanju filozofije, i nauke uopšte. Čuvena Pitagorina teorema je po nekim procjenama bila poznata kao tvrdjenje 1500 g. prije Pitagore, ali ni na jednom papirusu iz Egipta ili glinenoj pločici iz Mesopotamije nema dokaza te teoreme niti naznake da je nešto kao dokaz tada postojalo. Pitagora, ili neko od njegovih učenika, je dao prvi poznati dokaz teoreme, pa ona po njemu i nosi ime.

Pitagora i pitagorejci su se osim matematikom bavili astronomijom, muzikom i filozofijom. Pitagorina maksima kojom je pokušao da objasni zakonitosti koje vladaju svijetom je „**sve je broj**“. Njihova filozofija je podrazumijevala da se matematičkim sredstvima, konkretno brojevima, može objasniti svijet. Pitagorejci su radili na matematici, bavili su se matematičkim dokazima. Njihovim, veoma značajnim, dostignućem treba smatrati matematičku apstarkciju.

Današnjem matematičaru, ili čak i nematematičaru koji je prošao savremeni školski sistem, često promakne da primijeti da je broj (prirodan) apstraktan pojam. Preći sa koraka „2 ovce + 3 ovce = 5 ovaca“ na 2 + 3 = 5, odnosno, razumjeti da se 2 + 3 = 5 odnosi i na kuće, ljude, brodove, da se radi o generalnom pravilu je veliko dostignuće, kojem, s obzirom na epohu u kojoj se taj intektualni dogadjaj odigrao treba odati dužno poštovanje.

Pitagorejci ne samo da su uočili da je broj apstraktan pojam, već su zaključili da svijetom vladaju odnosi brojeva i svi odnosi se mogu svesti na odnose brojeva. „Sve je broj“ je njihov osnovni moto (maksima, geslo, parola, dogma). Tales kaže da je svijet nastao iz vode, Anaksimandar govori o „Apejronu“ (sudaru dvije suprotnosti; toplo i hladno, vlažno i suvo, vatra i voda), Anaksimen pominje vazduh, Demokrit atome. Pitagora svoju filozofiju vidjenja svijeta i zakonitosti u njemu objašnjava brojem! Do ovakvog rasuđivanja je Pitagora došao proučavajući geometriju, muziku i astronomiju. Brojevi kojima su Stari Grci tada baratali su bili prirodni (bez nule) i racionalni. Negativni brojevi tada nijesu bili poznati.

Od matematičkih rezulatata njegove škole najznačajniji su: Pitagorina teorema, teorema o zbiru uglova u trouglu i njeno uopštenje na mnogougao, razni rezultati u konstruisanju geometrijskih figura date površine, poznavanje osobina pet pravilnih poliedara, radovi iz astronomije. Pitagorejci su definisali aritmetičku, harmonijsku i geometrijsku sredinu, dali mnoga tvrdjenja vezana za brojeve, razmatrali proste, složene i savršene brojeve, ali i dijelili brojeve na muške i ženske, mršave i debele, lijepe i ružne, parne i neparne.

Možda najznačajnije otkriće Pitagore i njegovih učenika za dalji razvoj matematike kao teorijske discipline je otkriće nesamjerljivosti stranice i dijagonale kvadrata, uopšte otkriće nesamjerljivosti. Danas bismo rekli: otkriće iracionalnih brojeva. To znači da se odnos stranice i dijagonale kvadrata ne može izraziti brojem (tada korištenim). Otkriće nesamjerljivih duži je bio težak udarac Pitagorinoj maksimi, i temelji na kojima je počivala njegova filozofija su počeli da podrhtavaju. Prvi put je nastao problem koji se tadašnjim shvatanjima matematičkih pojmova nije mogao riješiti. Otkriće činjenica „da sve nije broj“ je ozbiljno uzdrmalo Pitagorin kult, što je bio glavni uzrok pada njegovog autoriteta i ugleda.

Osnovno saznanje do kojeg se došlo kroz otkriće nesamjerljivosti je da aritmetika nije dovoljna za zasnivanje matematike. Naime, Grci su matematiku dugo razdvajali na aritmetiku (arithmos = broj) i geometriju. Osnova Pitagorinog učenja je da je svijet, na najdubljem nivou, po svojoj prirodi matematički. Ispod fizičkog svijeta leži geometrija, a ispod nje brojevi, odnosno aritmetika. Bez brojeva nema postojanja. Pošto se ispostavilo da je jedno tako elementarno tvrdjenje – da su sve duži samjerljive – netačno, onda se i ostala matematička tvrdjenja stavljaju pod sumnju. Zato su matematičari tada počeli da sistematski istražuju osnovna geometrijska tvrdjenja i da ih dokazuju.

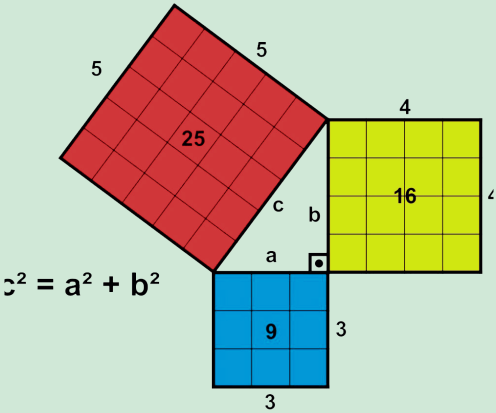
Većina istoričara matematike se slaže da je otkriće nesamjerljivih najvažniji intelektualni motiv za stvaranje teorijske matematike kod Starih Grka i da je ono podstaklo niz istraživanja koja su stvarala matematiku kao teorijsku disciplinu koja počiva na sledećem: **da su matematička tvrdjenja opšte važeća i da se njihova istinitost potvrdjuje dokazima**.

Pitagorina teorema

Najpoznatija teorema, koja po Pitagori nosi ime je **Pitagorina teorema**, koja se primjenjuje u geometriji. **Po ovoj teoremi, u pravouglom trouglu površina kvadrata nad hipotenuzom jednaka je zbiru površina kvadrata nad katetama**.

Dakle, ako su poznate dužine dvije stranice takvog trougla, Pitagorinom teoremom se lako može izračunati dužina treće stranice.

Pitagorina teorema



Politička dešavanja

Pitagora je nastojao da se ne miješa u politiku. Međutim, društvene okolnosti kao i uticaj koje je njegova škola imala na lokalnu zajednicu u kojoj je živio, su ga uvlačile u politiku. S obzirom da su pitagorejci imali aristokratski i konzervativan stav, često su ih napadale demokrate, spaljivale im kuće i proganjale ih. Zbog svega ovoga, Pitagora je bio primoran da pobjegne u Metapont, gdje je i umro oko 494. godine p. n. e. Po nekim autorima, izvršio je samoubistvo nezadovoljan odnosom sredine prema njegovom društvu

ZANIMLJIVA STRANA

Goldbah – Ojlerov problem

Poznato je da se svaki složen broj može predstaviti kao proizvod prostih brojeva. A da li se može prirodan broj predstaviti kao zbir prostih brojeva?

U vezi sa tim prvi je iznio jednu pretpostavku još skoro prije dvije stotine pedeset godina član tadašnje Petrogradske akademije nauka **Hristijan Goldbah (1690-1764).** On je, naime, u jednom svom pismu, upućenom 1742. godine matematičaru **Leonardu Ojleru (1707-1783),** saopštio da smatra da bi se moglo dokazati da se svaki neparan broj, veći od 5, može predstaviti kao zbir od ne više od 3 prosta broja. To se pokazuje tačnim kad se ispituje, redom, čitav niz prvih neparnih brojeva. Tako je na primjer:

$7 = 2 + 2 + 3, \quad 9 = 3 + 3 + 3, \quad 11 = 2 + 2 + 7, \quad 13 = 3 + 5 + 5,$ itd.

Neki od ovih brojeva mogu se na više načina prikazati kao zbirovi od po 3 prosta broja. Ali dokaz da je ova tvrdnja tačna za sve neparne brojeve Goldbah nije imao.

Ojler je Goldbahu odgovorio da ne može dokazati ovo svojstvo neparnih brojeva, ali da misli da bi se moglo dokazati sljedeća teorema: **svaki paran broj,**

veći od 2, može se predstaviti u vidu zbira dva prosta broja. Na primjer:

8 = 3 + 5,   28 = 11 + 17, itd.

Uostalom, kaže dalje Ojler, kad bi se dokazalo ovo svojstvo parnih brojeva, samim tim bi bila dokazana i Goldbahova teorema. Svaki neparan broj može se, naime, predstaviti kao zbir nekog prostog broja, na primjer 3, i jednog parnog broja; i ako bi bilo tačno da se svaki paran broj može predstaviti kao zbir dva prosta broja, svaki neparan broj bi se mogao predstaviti kao zbir tri prosta broja.

Posle toga je veliki broj matematičara pokušavao da dokaže tačnost bilo prve, bilo druge od ove dvije teoreme, ali sve do danas u tome u potpunosti nije niko uspio. Ispitivani su svi brojevi do 100.000 i utvrđeno je da za njih važe ove teoreme; ali da one uopšte važe, ili da one ne važe, to još niko nije mogao da dokaže.

Ipak dva značajna rezultata u pogledu utvrđivanja tačnosti ovih teorema bila su postignuta početkom prošlog stoljeća i ona su sljedeća.

Godine 1930. sovjetski matematičar Šinireljman (1905-1938) uspio je da dokaže da postoji izvjestan broj K, takav da se svaki broj može predstaviti kao zbir ne više od K prostih brojeva. Prema tome, kada bi se utvrdilo da je K = 3, Goldbanova hipoteza bila bi dokazana. Međutim, kasnije je dokazano samo da nije veće od 20. Zatim je 1937. god. sovjetski matematičar **Ivan Vinogradov (1891-1983)** dokazao sljedeću teoremu: „Postoji konstanta C takva da svaki neparan broj N, veći od C, može biti predstavljen u vidu sume 3 prosta broja $N = p_1 + p_2 + p_3$. Ovo je bilo vrlo značajno otkriće, ali se odnosilo samo na neparne brojeve, a sem toga je bilo utvrđeno i da je C relativno veliki broj. Međutim, teorema je do danas ostala nedokazana.

Ivan Obrenić, JU OŠ „Mile Peruničić“ – Maoče, Pljevlja

Logički zadaci

1. Voz od 10 vagona prešao je 100 km. Koliko kilometara je prešao svaki vagon tog voza.
2. Dječak i djevojčica imali su isti broj oraha. Dječak je dao djevojčici 3 oraha. Jasno je da je poslije toga djevojčica imala više oraha nego dječak. Za koliko?
3. Mogu li se 3 jabuke razdijeliti između dva oca i dva sina, tako da svaki od njih dobije tačno jednu jabuku?
4. Automobil ide brzinom 60 km na sat. Za koliko treba povećati ovu brzinu da bi se na svakom kilometru puta dobilo u vremenu po jedan minut?
5. Količnik dva broja je 13 puta manji od djeljenika. Koliki je djelilac?

Ivan Obrenić, JU OŠ „Mile Peruničić“ – Maoče, Pljevlja

ZADATAK SA NASLOVNE STRANE:

Prvih 5 učenika koji pošalju tačno rješenje zadatka sa naslovne, dobiće na poklon primjerak četvrtog broja *Dijagonale*.

Rješenja zadataka sa naslovne strane iz prošlog broja:

1)

$$\begin{array}{r} \text{KOKA} \\ +\ \text{KOLA} \\ \hline \text{VODA,} \end{array} \quad \mathbf{A = 0, K = 3, O = 9, L = 8, D = 1 \text{ i } V = 7.}$$

Imena učenika koji su uspješno riješili ovaj zadatak i koji će dobiti besplatan primjerak trećeg broja Dijagonale:

1. **Emir Alković**, „Anto Đedović" VII-2, Bar;
2. **Balša Đoković**, „Anto Đedović" VII razred, Bar;
3. **Aldijana Ličina**, „Meksiko", Bar;
4. **Jakovljević Lena**, Maksim Gorki" VI-6, Podgorica.

2) Jedno od rješenja je: $\mathbf{2019 = 1 + 3 \cdot 0 + ((7 \cdot 8 - 6) \cdot 4 \cdot 5 + 9) \cdot 2.}$

Imena učenika koji su uspješno riješili ovaj zadatak i koji će dobiti besplatan primjerak trećeg broja Dijagonale:

1. **Sofija Kaluđerović**, „Štampar Makarije", IX-a, Podgorica;
2. **Staša Stojanović**, „Maksim Gorki" VIII-5, Podgorica.

Zadatke za naslovnu stranu iz prošlog broja je pripremila ***Hidajeta Lukač, JU OŠ „Dušan Korać", Bijelo Polje.***

Uredništvo poziva nastavnike, učenike i sve čitaoce da nam šalju priloge za list: članke, odabrane zadatke, zanimljivosti, priloge za zabavnu matematiku itd.

Dio tiraža ovog broja „Dijagonale" će biti besplatno podijeljen svim nastavnicima matematike u osnovnim školama, kao i svim bibliotekama osnovnih škola u Crnoj Gori.
Ovaj broj se može kupiti u „Gradskoj knjižari" i „Narodnoj knjizi".

Sve informacije o pretplati i porudžbini ovog i narednih brojeva možete naći na sajtu Udruženja. Narudžbe slati putem mejla.

Broj žiro računa UNMCG je **550-18240-71** kod Societe Generale Montenegro banke.

Adresa redakcije je: Ul. Gojka Berkuljana br. 20, Podgorica.

Mejl: udruznastmatem@gmail.com

www.unmcgwordpress.com

CIP - Каталогизација у публикацији
Национална библиотека Црне Горе, Цетиње

ISSN 2536-5851 = Dijagonala
COBISS.CG-ID 36769808

ISSN 2536–5851

9 772536 585009 >