Udruženje nastavnika matematike Crne Gore

Dijagonala

Matematički list za učenike osnovnih škola

BROJ 1

GODINA 2018.

Udruženje nastavnika matematike Crne Gore
Matematički list za učenike osnovnih škola – „**Dijagonala**”
Godina 2018. **Broj 1**

Sadržaj

Poštovani prijatelji - učenici i nastavnici,

Pred Vama je prvi broj matematičkog časopisa za učenike osnovnih škola - „Dijagonala“. Izdavač i pokretač ovog časopisa je Udruženje nastavnika matematike Crne Gore. Kako u Crnoj Gori godinama unazad niko ne štampa matematički list, smatramo da je časopis ovakvog tipa potreban osnovcima, te da će „Dijagonala“ biti od pomoći učenicima, nastavnicima i roditeljima, i da će nastavu matematike podići na viši nivo.

Časopis je koncipiran tako da učenici uvijek mogu naučiti i saznati nešto novo iz matematike, produbiti i sistematizovati znanja stečena na redovnoj nastavi. Biće od pomoći i učenicima i nastavnicima na dodatnoj nastavi, kao i onim učenicima koji se pripremaju za takmičenja. Osim matematičkih tema imaćemo i rubriku posvećenu računarima i programiranju.

Uvjereni smo da ćete u svakom broju „Dijagonale“ pronaći nešto novo i interesantno. Vjerujemo da će mnogi učenici kroz naš i Vaš časopis još više zavoljeti matematiku, ali da će biti zanimljiv i onim učenicima koji se manje interesuju za matematiku.

Matematika je u svim obrazovnim sistemima u svijetu bazični predmet. Kroz nju razvijate logičko mišljenje, misaone operacije, način razmišljanja. Dobar matematičar se dobro snalazi i u ostalim predmetima i disciplinama. Bez znanja matematike i korišćenja računara ne može se zamisliti savremeno obrazovan čovjek.

Znak (logo) našeg Udruženja je uradio Vanja Perović, specijalista grafike, te mu ovom prilikom zahvaljujemo.

Časopis „Dijagonala“ ne može da zamijeni postojeće udžbenike i zbirke zadataka. On treba da posluži kao pomoćno nastavno sredstvo na časovima redovne i dodatne nastave matematike, da uz njega lakše savladate i utvrdite određene teme, produbite i proširite svoja znanja.

Ovaj broj smo pripremili mi – članovi redakcije. Nadamo se da ćemo sve naredne brojeve pripremati zajednički i da ćete nam slati članke, zadatke i ostale priloge koji će doprinijeti da „Dijagonala“ dobije još više na kvalitetu. Sa zadovoljstvom ćemo objavljivati priloge naših nastavnika i učenika. Stoga Vas pozivamo da nam pišete i da sarađujemo.

U nadi da će „Dijagonala“ naići na dobar prijem i pozitivne kritike, srdačno Vas pozdravljamo!

REDAKCIJA

Mr Radomir Božović

DIRIHLEOV PRINCIP

U osnovnoj školi se s Dirihleovim principom najčešće susrećemo kroz primjere ovakvog tipa:

Primjer 1. Ako sedam zečeva treba rasporediti u 3 kaveza, tada se u nekom od tih kaveza nalaze makar tri zeca!

Primjer 2. Može li se tvrditi da u odjeljenju sa više od 32 učenika postoje bar dva učenika čija prezimena počinju istim slovom?

U zadacima koji se rješavaju Dirihleovim principom pojavljuju se uslovi koji nijesu strogo određeni, poput: „nekom od“, „barem dva“, ili „više od“, na osnovu kojih dolazimo do strogih logičkih zaključaka. U prvom primjeru postoji makar jedan kavez u kojem su barem tri zeca. Jer ako bi u svakom kavezu bila po dva ili manje zečeva, tada bi imali 6 ili manje od 6 zečeva, što je suprotno sa pretpostavkom da je 7 zečeva. Slično razmišljamo i u drugom primjeru. Ako bi prezimena prvih 32 učenika počinjala različitim slovima, tada bi prezime trideset trećeg učenika moralo da počinje slovom koje smo već koristili. Dakle, makar dva učenika imaju prezimena koja počinju istim slovom.

Definicija Dirihleovog principa

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) rođen je na teritoriji današnje Njemačke (Düren). Studirao je u Parizu, a bio profesor u Berlinu i Getingenu. Dirihleov princip se može definisati kao „princip kaveza“: **Ako su k+1 ili više zečeva smješteni u k kaveza, tada postoji kavez u kojem su bar 2 zeca.** To je „slaba forma“ ovog principa.

Takozvana „jaka forma“ Dirihleovog principa glasi: **Ako je u n kaveza smješteno k·n + 1 zečeva, tada je u nekom kavezu smješten bar k+1 zec.** Strogo formalno, Dirihleov princip glasi: Ako su A i B konačni skupovi i $|A| > |B|$, onda ne postoji 1-1 preslikavanje skupa A na skup B. ($|A|$ je broj elemenata skupa A). Drugim riječima, postoji bar jedan element skupa B koji je slika bar 2 elementa iz skupa A.

Princip je primjenljiv kako u aritmetici, tako i u geometriji i drugim oblastima matematike, najčešće za nivo učenika osnovnih i srednjih škola. Na matematičkim takmičenjima tog nivoa često se pojavljuju zadaci koji se ovom metodom efikasno rješavaju, a javljaju se počev od školskih takmičenja učenika osnovnih škola do međunarodnih matematičkih olimpijada za srednjoškolce. U zadacima je najvažnije prepoznati šta su „zečevi”, a šta „kavezi”.

Primjer 3. Dokazati da među 14 proizvoljno izabranih prirodnih brojeva postoje makar dva čija je razlika djeljiva se 13.

Rješenje. Ostaci prirodnih brojeva pri dijeljenju sa 13 mogu biti: 0, 1, 2, 3, …, 12. Ako bi prvih 13 brojeva imalo različite ostatke, tada bi četrnaesti broj morao imati ostatak kao jedan od prethodnih brojeva. Neka su to brojevi $A = 13k + s$ $(s \leq 13)$ i $B=13p+s$. Tada je $A-B=13(k-p)$ što znači da je razlika $A-B$ djeljiva sa 13.

Primjer 4. Data je kvadratna tabela 3x3. Da li se tabela može popuniti brojevima 1, 2 i 3 tako da zbir brojeva u svakoj koloni, vrsti i dijagonali bude različit?

Rješenje. Različiti zbirovi brojeva od brojeva 1, 2 i 3 su: $3=1+1+1$, $4=1+1+2$, $5=1+2+2$, $6=2+2+2$, $7=2+2+3$, $8=2+3+3$, $9=3+3+3$. Ukupan broj kolona, vrsta i dijagonala je 8, a broj različitih zbirova je 7. Dakle, takav raspored nije moguć.

Primjer 5. Data je kocka ivice 13 cm i u njoj je izabrano 2018 tačaka. Da li se u ovoj kocki može pronaći kocka ivice 1 cm koja ne sadrži nijednu od izabranih tačaka?

Rješenje. Datu kocku ivice 13 cm podijelimo ravnima koje su paralelne stranama kocke na kocke ivice 1 cm. Takvih, novodobijenih kocki je $13 \cdot 13 \cdot 13=2197$. Ako u svakoj takvoj kocki rasporedimo po jednu od izabranih 2018 tačka, tada postoje kocke u kojima se ne nalazi nijedna od izabranih tačaka, jer je $2197 > 2018$. Znači, postoji kocka ivice 1 cm u kojoj nema izabranih tačaka.

Primjer 6. Dat je jednakostranični trougao čija je stranica 31 dm i u njemu je na slučajan način raspoređeno 2000 tačaka. Dokazati da postoji krug poluprečnika 6 cm, unutar koga se nalaze bar tri od datih tačaka!

Rješenje. Podijelimo jednakostranični trougao na manje jednakostranične trouglove čija je stranica 1 dm. Takvih trouglova je $31^2 = 961$. Ako se u svakom od njih nalaze po dvije odabrane tačke, tada će ukupno biti raspoređeno $961 \cdot 2 = 1922$ tačke. Preostalih, $2000 - 1922 = 78$ tačaka će biti u nekima od malih jednakostraničnih trouglova. Dakle, postoji makar jedan jednakostranični trougao stranice 10 cm koji sadrži makar tri tačke. Opišimo oko tog trougla krug. Njegov poluprečnik je $r = \frac{10\sqrt{3}}{3} = 5,77 < 6$. Krug koncentričan prethodnom krugu, poluprečnika $r_1 = 6$ cm sadrži iste tri tačke, što je trebalo dokazati.

Primjer 7. Na testiranju su učestvovala 22 učenika iz 8 škola koji su pravilno riješili 50 zadataka. Svi učenici iz iste škole riješili su isti broj zadataka, a dva učenika iz različitih škola su riješila različit broj zadataka. Svaki učenik je tačno riješio makar jedan zadatak. Koliko je učenika tačno riješilo makar jedan zadatak?

Rješenje. Izaberimo, iz svake škole po jednog učenika koji je tačno uradio makar po jedan zadatak. To je ukupno 8 učenika i oni su ukupno riješili $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$ zadataka. Kako je preostalo još $22 – 8 = 14$ učenika i $50 – 36 = 14$ zadataka, to znači, da bi bili ispunjeni svi uslovi zadatka, da je svaki od preostalih 14 učenika tačno riješio po jedan zadatak. Dakle, ukupno je 15 učenika koji su riješili po jedan zadatak.

Primjer 8. Dokazati da u školi koja ima 1100 učenika postoje makar četiri učenika koji rođendan slave u istom danu!

Rješenje. Ako prvih 365 učenika slavi rođendan u različitim danima, pa i narednih 365 učenika ako slave rođendan u različitim danima, tada bi imali 730 učenika, tako da u svakom danu tačno po dva učenika slave rođendan. Uzmimo da i narednih 365 učenika slavi rođendan u različitim danima. To znači da imamo 1095 učenika, tako da u svakom danu tačno po tri učenika slave rođendan. Međutim, kako je $1100 > 1095$, to prema Dirihleovom principu mora postojati dan u kome makar četiri učenika slave rođendan.

Zadaci za vježbu:

1. Šesnaest tačaka je raspoređeno u jediničnom kvadratu. Dokazati da među njima postoje tri tačke takve da je površina trougla kome su one tjemena manja od 1/15.
2. Dat je skup A sa 50 elemenata i neka je $A \subset \{1,2,3,...,99,100\}$. Ako u skupu A ne postoje dva broja čiji je zbir 100, tada u skupu A postoji bar jedan broj koji je potpun kvadrat.
3. Na stoljnjaku kvadratnog oblika veličine 80 cm x 80 cm kapnulo je 70 mrlja od tuša. Dokazati da su neke dvije mrlje na rastojanju manjem od 15 cm.
4. Dokazati da se iz skupa od bilo kojih 10 različitih dvocifrenih prirodnih brojeva mogu izabrati dva disjunktna podskupa takva da su zbirovi brojeva iz oba podskupa jednaki.
5. Data je kvadratna tablica 8 x 8, i u svakom njenom polju je upisan jedan broj, tako da razlika dva broja iz susjednih polja (polja su susjedna ako imaju zajedničku ivicu) nije veća od 4. Dokazati da se u tablici nalaze makar dva ista broja!

Prof. dr Milenko Mosurović

ZAPIS BROJEVA U BINARNOM BROJNOM SISTEMU

Iz matematike smo naučili da brojeve zapisujemo u dekadnom brojnom sistemu koristeći 10 cifara 0,1,...,9. Međutim, naučili smo da brojeve možemo zapisivati i na drugi način – rimskim ciframa. U računarskom sistemu sve informacije se pamte pomoću nula i jedinica. Jedan od razloga za to je što se dva stanja (nula ili jedan) lako mogu prikazati.

Slika 1. *Kodira 1011*

Npr. na slici 1 sijalica koja ne svijetli (tj. ako nema struje) može nam označavati nulu, a sijalica koja svijetli (tj. ako ima struje) može predstavljati jedinicu. Tako se i brojevi zapisuju pomoću dvije cifre: 0 i 1. Takav sistem se naziva binarni brojni sistem. Pokažimo kako zapisujemo prirodne brojeve i nulu u binarnom brojnom sistemu. Jasno je da ćemo sa cifrom 0 zapisati broj nula, a sa cifrom 1 broj jedan. Pošto nemamo više cifara da bi zapisali broj dva moramo koristiti dvije cifre. Kao i u dekadnom brojnom sistemu cifra nula ispred nekog broja nema nikakvu vrijednost, zato nam početna cifra kod više-cifrenih brojeva uvijek mora biti 1. Otuda je kod broja dva prva cifra 1, a druga je najmanja moguća koja nije iskorišćena na toj poziciji. Dakle, zapis broja dva u binarnom brojnom sistemu je 10. Sledeći broj zapisujemo tako što uvećamo posljednju cifru ako je to moguće. Tako ćemo broj tri zapisati kao 11. Ako nije moguće uvećati posljednju cifru onda pokušavamo uvećati pretposlednju, a ako ni to nije moguće onda pokušavamo uvećati cifru ispred nje i tako redom. Ako uvećamo neku cifru, onda sve cifre iza nje postavljamo na nulu (tj. najmanju moguću cifru). Ako nije moguće uvećati nijednu cifru onda povećavamo broj cifara. Kako kod broja 11 ne možemo uvećati ni jednu cifru, onda broj četiri zapisujemo sa tri cifre 100.

I	II	III	IV	V
1	2	4	8	16
3	3	5	9	17
5	6	6	10	18
7	7	7	11	19
9	10	12	12	20
11	11	13	13	21
13	14	14	14	22
15	15	15	15	23
17	18	20	24	24
19	19	21	25	25
21	22	22	26	26
23	23	23	27	27
25	26	28	28	28
27	27	29	29	29
29	30	30	30	30
31	31	31	31	31

Slika 2.

Uočimo da je početna cifra jedinica, a ostale cifre su najmanje moguće tj. nule. Broj pet zapisujemo sa 101 (povećali smo posljednju cifru), broj šest sa 110 (povećali smo pretposljednju cifru a sve cifre iza nje postavili na nulu), broj sedam sa 111. Za broj osam moramo koristiti četiri cifre i njega zapisujemo sa 1000. Slično prethodnom sada brojeve od devet do petnaest zapisujemo redom sa 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111. Broj šesnaest zapisujemo sa 10000. Dekadni broj 303 u binarnom sistemu zapisujemo sa 100101111, a broj 304 sa 100110000. Znači, da bi zapisali sljedeći broj tražimo prvu cifru 0 gledano s desna ulijevo, nju zamijenimo sa 1, a cifre iza nje postavimo na 0. Slično dekadnom brojnom sistemu binarni brojni sistem je pozicioni tj. vrijednost cifre zavisi od njene pozicije. Ako je binarna cifra c na poziciji p onda je njena vrijednost $c \cdot 2^p$. Tako broj $(100101111)_2 = 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 256 + 0 + 0 + 32 + 0 + 8 + 4 + 2 + 1 = 303$. Ovaj zapis možemo iskoristiti za sljedeću igru. Upišimo brojeve od 1 do 31 u pet kolona. U prvu kolonu smještamo one brojeve koji na nultoj poziciji binarnog zapisa imaju cifru 1, u drugu brojeve koji na prvoj poziciji imaju cifru 1 itd. Dobijamo tabelu kao na slici 2. Kažite drugu-drugarici da zamisli jedan broj do 31 i kaže vam u kojim kolonama se on nalazi, a onda vi pogodite njegov broj. Npr. ako kaže da se broj nalazi u I, III i V koloni vi ćete sabrati brojeve iz prvog reda tih kolona tj. 1 + 4 + 16 i odgovoriti da je zamislio broj 21. Naime $(21)_{10} = (10101)_2 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0 = 16 + 4 + 1$.

310	0
155	1
77	1
38	0
19	1
9	1
4	0
2	0
1	1
0	

Slika 3.

Pokažimo na primjeru kako da za neki dekadni broj nađemo njegov binarni zapis. Posmatrajmo broj 310. Račun sprovodimo kao na slici 3. Broj dijelimo sa dva. Rezultat zapisujemo ispod posmatranog broja a ostatak desno od broja. Postupak nastavljamo sa brojem koji smo dobili kao rezultat dijeljenja sve dok ne dobijemo nulu. Tako, kada 310 podijelimo sa dva dobijemo 155 i ostatak 0. Zatim dijelimo 155 sa 2 i dobijamo 77 i ostatak 1... Na kraju pročitamo dobijene ostatke u obrnutom redosljedu od njihovog zapisivanja (tj. odozdo na gore). Tako je 100110110 **binarni zapis broja 310**.

Zaista, $(100110110)_2 = 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 256 + 32 + 16 + 4 + 2 = 310$.

ZADACI ZA VJEŽBU

VI razred

Djeljivost u skupu N. Skupovi tačaka.

I nivo

1. Iz skupa $A = \{5,18,24,17,72,805\}$ izdvojiti podskup:
   a) prostih brojeva; b) brojeva djeljivih sa 3; c) brojeva djeljivih sa 5.
2. Odrediti cifre a i b tako da:
   a) $2|35a$, b) $5|312ab$, c) $4|a81b$.
3. Odrediti zbir svih djelilaca broja 45.
4. Da li je vrijednost izraza $36 - 24 : 6 - 4 \cdot (35 - 29)$ prost ili složen broj?
5. a) Za koliko je NZS (48,64,80) veći od NZD-a tih brojeva?
   b) Koliko puta je NZD (48,72) manji od NZS-a za te brojeve?
6. Kojom najvećom zajedničkom mjerom možemo izmjeriti 72 kg i 96 kg?
7. Odrediti:
   a) najmanji broj koji je djeljiv brojevima 48 i 64.
   b) najveći broj kojim se mogu podijeliti brojevi 518 i 814.
8. Na jednoj vježbi učesnici su se poređali po 24, a nakon toga su se prestrojili po 16. Koliko je najmanje učesnika bilo na toj vježbi?
9. Tri žice dužina 32 m, 48 m i 112 m treba isjeći na najveće moguće jednake djelove. Koliko ukupno ima tih djelova?
10. U ravni su date 3 kolinearne tačke. Koliko one određuju: a) pravih, b) polupravih, c) duži?

II nivo

1. Odrediti cifru a tako da:
   a) $6 \mid 289a$;
   b) je broj 128a istovremeno djeljiv sa 2, 3 i 4.
2. Koliko ima trocifrenih brojeva zapisanih različitim ciframa koji su djeljivi sa 5?
3. Dokazati da u skupu prostih brojeva osim broja 2 nema više parnih brojeva.
4. Zamijeniti * odgovarajućom cifrom tako da važi:
   a) $3 \mid 100{*}1 + 369$,
   b) $2 \mid 2325 \cdot 54{*}$,
   c) $10 \mid 2101 + 3029 + 202{*}$.

5. Da li je broj 44044 djeljiv sa:

   a) $x = 2 \cdot 7 \cdot 11^2$, b) $y = 2^2 \cdot 11 \cdot 13$.

6. Naći NZD(NZS(36,96), 96) i NZS(NZD (36,96), 96).

7. Ako: a) su a i b uzajamno prosti brojevi naći NZD(a,b) i NZS(a,b),

   b) $a \mid b$ naći NZD(a,b) i NZS(a,b).

8. Od 36 bijelih i 48 rozih cvjetova koliko najviše jednakih buketa možeš da napraviš? Koliko rozih cvjetova ima u svakom buketu? Kolika je cijena jednog buketa ako su rozi cvjetovi po 2 a bijeli po 1 euro?

9. Dva signala se emituju sa iste početne stanice počevši od 6 sati i to prvi signal na svakih 25 minuta, a drugi na svakih pola sata. Koliko puta će se oba signala istovremeno emitovati sa početne stanice ako se emitovanje signala završava u 20 h?

10. Brojevi 300 i 244 pri dijeljenju sa brojem b daju redom ostatke 12 i 7. Naći broj b.

11. Na pravoj *a* su date redom tačke A, B, C i D. Odrediti:

    a) $AB \cup BC$, b) $AC \setminus BC$, c) $AC \cap BD$,

    d) $(AB \cap BC) \cup CD$, e) $(AB \cap BC) \cup BC$, f) $AD \setminus (AC \cup BD)$.

Danijela Jovanović

VII razred

Skup cijelih brojeva.

I nivo

1. Poređati po veličini vrijednosti izraza A, B, C i D ako je:

   $A= -11+7-(-9)+(-5)-(-12)$, $B= -24+(12-19)-(8-12-19)$,

   $C= -12+17-|-13|+24-|2|-16$ i $D=11-4-(4-6)-[5-(12-20)]-(3-7)$.

2. Izračunati:

   a) $-6-(7-b-(a-11))$, za $a = 2$, $b = -4$,

   b) $a-|a-b|-|b|$, za $a=13$, $b = -6$.

   c) $|-2+|1-|-2+4||+| 2+ |-6||\,|$

3. a) Razlici brojeva –52 i –38 dodati zbir brojeva 12 i –25, zatim taj zbir umanjiti za onaj broj koji je za 17 manji od –45.

   b) Od razlike brojeva 100 i –75 oduzeti razliku zbira i razlike brojeva –63 i –12.

4. 1) Riješiti jednačine: a) $8-(x+11) = 3+(-5)-(-2-8)$,

b) $1-(-1-(-1-(-1-x))) = -(-2-(-2-(-2)))$.

2) Koliko treba oduzeti od zbira brojeva -81 i 17 da bi se dobio broj koji je za -28 manji od broja 12?

3) Zbir dva broja je -27, a razlika je -45. Koji su to brojevi?

5. 1) Osloboditi se zagrada, uprostiti izraz i izračunati njegovu vrijednost za $a = -3$. $a-\{-5-[-a-(-5+a)]\}$

2) Izračunati: $-(-(+(-x)))-(y-5)$, ako x ispunjava uslove $|x| = 7$ i x je negativan cio broj, a i y je najmanji cio broj tako da $|y| < 2$.

6. Izračunati: a) $-(-4)+(-2)-(-6)-8+3$, b) $(-5-6)-(-10+7)+(7-5)$,

c) $-|-9|-|-3+17| + |5|$.

7. a) Razlici brojeva -52 i -38 dodati zbir brojeva 12 i -25.

b) Zbiru brojeva 17 i -54 dodati razliku tih brojeva.

8. Riješiti jednačine: a) $x+(-2{,}3+5\frac{1}{2})=-4$, b) $x-(1\frac{1}{3}-2)=\frac{5}{6}$, c) $-x+3\frac{4}{5} =16\frac{1}{2}-18$.

9. Za koliko treba smanjiti zbir brojeva $-\frac{11}{12}$ i $3\frac{1}{8}$ da se dobije broj 10,5?

10. Riješiti nejednačine:

a) $15+x-7>3-6$; b) $4-(9-x)-11<15-26$; c) $11-x-17>5-8$;

d) $-15-(-10+x)-12<16-27$; e) $11-(8-x+14) \leq 6+(-8)-(-5-13)$;

f) $6-(-11+x+10) \geq 8-9-(-6+3)$.

11. Od sume koju je Milan imao potrošio je 56 €, sestri je dao 100 € i ostala su mu 23 €. Koliko je novca Milan imao?

II nivo

1. Izračunati vrijednosti izraza:

a) $8-6\cdot(4-11)+4+(-27+11):8-13$; b) $(-36):(5-11-8+2)\cdot(-4)$;

c) $[-13:(-10-9:3)-7]+5\cdot(-3)$; d) $3\cdot(-4)-[-5-(48:8+24)-63:7]:11+(-2)\cdot 5$;

e) $6-\{4\cdot[-20+(-3+4\cdot 6)+24:6]\}:10+(-2)\cdot 5$.

2. Ako je $A = (-|-3|\cdot(-2)+(-6))$ i $B = -|-6-|-3|\cdot|-2||:(-4)$, tada je:

a) $A = B$, b) $A < B$, c) $A > B$.

Zaokružiti slovo ispred tačnog odgovora.

3. Ako je $A = -4\cdot|+2|+5\cdot|-3|$, $B = -5\cdot|-2|+2$, $C = |-7+9|\cdot|-3+5-2|$, $D=-2\cdot|9-13| +5\cdot|-17+8|$, da li je $ABD < C$ ili je $ABD > C$ ili je $ABD = C$?

4. a) Razliku petostruke vrijednosti broja -13 i trostruke vrijednosti broja 15 oduzeti od -100.

b) Proizvod brojeva –100 i 0 umanjiti za proizvod brojeva –100 i –1, toj razlici dodati zbir brojeva 61 i –71, pa dobijenu vrijednost izraza oduzeti od broja 10.

c) Od količnika brojeva –144 i 12 oduzeti proizvod brojeva 24 i –3, pa cio izraz pomnožiti sa –2.

d) Broju –51 dodati količnik brojeva 72 i –9 umanjen za razliku brojeva –15 i +8, pa dobijeni zbir podijeliti sa –3.

5. Odrediti cio broj x tako da je $(-10)+(-9)+.....+(x-1)+x = -27$. Koliko rješenja ima?
6. Uprostiti izraze: a) $-6\cdot(2x-1)+3\cdot(-4x+5)-(-3-(4x+1))$;
   b) $2\cdot(3x-1)+5\cdot(-4x+2)-(3-(2x-5)+7)$.
7. Ne vršeći množenje dokazati da je izraz:
   a) $63\cdot74-63\cdot51-63\cdot12$ djeljiv sa 11;
   b) $78\cdot16-78\cdot82+78\cdot72$ djeljiv sa 6.
8. Riješiti jednačine:
   a) $x:(-5)= 20$; b) $-7x= -56$; c) $52:x= -13$; d) $x:3= -21$; e) $-40:x= -5$
   f) $-16:(-6x-2)= -4$; g) $(3x-2):2= -7$; h) $3=(-4+5x):(-8)$;
   i) $(2x+6)(x-4)= 0$; j) $2x-3\cdot(5-2x)=9-(x-3)$; k) $-5\cdot(3x+1)-11=2\cdot(-x-21)$;
   l) $5x-3\cdot(4-2x)=8-2\cdot(-7x+1)$.
9. Odrediti vrijednost nepoznate a u izrazu $-5a+3b-8-2c = -8$, ako je b rješenje jednačine $-12+4b = -2-2$, a c je rješenje jednačine $-3c+(12-20) = -2$.
10. Zbir 5 uzastopnih cijelih brojeva je manji od –40. Odrediti bar dva rješenja.
11. Koji cio broj ima svojstvo da njegova dvostruka vrijednost umanjena za proizvod brojeva –15 i 4 nije veća od razlike broja –48 i količnika brojeva –48 i 12. Koliko ima takvih brojeva?
12. Ako se od broja –48 oduzme petostruka vrijednost nekog broja, dobija se broj veći od –3. Izračunati taj nepoznati broj.
13. Odrediti sve cijele brojeve koji imaju svojstvo da petostruka vrijednost tih brojeva umanjena za razliku trostrukog tog broja i broja 12 nije veća od –10.

Vanja Đurđić-Kuzmanović

VIII RAZRED

Razmjera, proporcije, procenat. Kvadriranje, korjenovanje.

I nivo

1. Koja je razmjera jednaka razmjeri 6:5?

a) 16:30; b) 15:45; c) 45:15; d) 36:30; e) 40:48.

2. Razmjera dva broja je 10:3. Odrediti te brojeve ako je njihov:
   a) zbir 169,
   b) proizvod 750.
3. U kom su odnosu p i q ako je p–$3\frac{1}{2} = -8\frac{2}{5}$ i q–5,1= $-7\ \frac{1}{4}$?
4. Jedan vagon džakova cementa istovarila su 3 radnika za 12 časova. Za koliko bi časova taj vagon istovarila 4 radnika?
5. Za 40 minuta Filip je pretrčao 4,2 km. Koliki put je prešao za 6 sati, ako se kretao nepromijenjenom brzinom?
6. Razlomke: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{5}{40}$, $\frac{17}{25}$ napisati u obliku procenta.
7. Slon prosječno prespava 3 sata u toku dana. Koliko je to procenata u odnosu na cio dan?
8. Cijena neke robe je 420 €. Kolika bi bila cijena te robe poslije:
   a) pojeftinjenja od 25%;
   b) poskupljenja od 20%;
   c) poskupljenja od 50%, a zatim pojeftinjenja od 20%;
   d) pojeftinjenja od 10%, a zatim pojeftinjenja od 30%.
9. Izračunati brojnu vrijednost izraza:

   a) $-3^2 + \left(-5^2\right) - \left(-5\right)^2$, b) $\sqrt{2{,}25} + \frac{7}{5} \cdot \sqrt{2 - \frac{17}{49}}$.

10. Izračunati brojnu vrijednost izraza: $\frac{6a^2b^2 - a^2b - 1}{a \cdot b}$, ako je $a = -4$, $b = -\frac{1}{2}$.
11. Riješiti jednačine: a) $-5x^2 + 320 = 0$, b) $2 - \sqrt{x-2} = 5$.
12. Brojeve 0,81; $\frac{25}{169}$; 1– $\frac{24}{25}$ napisati u obliku kvadrata.

II nivo

1. Marija je visoka 1,66 m, a njena mlađa sestra Ana 1,02 m. U kojoj su razmjeri njihove visine?
2. Pravougaona parcela dimenzija 400 m × 250 m predstavljena je na crtežu pravougaonikom sa stranicama dužine 8 cm i 5 cm. U kojoj razmjeri je nacrtana parcela?
3. Zoran, Dušan i Nikola su naslijedili sumu od 2775 €. Prema testamentu, djelovi koje dobijaju Zoran i Dušan odnose se kao 3:2, a dio koji pripada

Nikoli prema Zoranovom dijelu stoji u razmjeri 4:5. Koliko je svaki od njih naslijedio?

4. Odredi nepoznati član u proporciji:

   a) $x : 2\frac{1}{2} = 0{,}6 : 1\frac{1}{5}$, b) $4\frac{3}{4} : 2\frac{3}{8} = 7\frac{1}{5} : 0{,}2x$.

5. Četiri konja za 14 dana pojedu 60 plastova sijena. Koliko konja bi za 5 dana pojelo 150 plastova sijena?
6. Na jednom brodu za 42 člana posade ima hrane za 32 dana. Poslije 8 dana plovljenja je na drugi brod prešlo 6 mornara. Za koliko dana će imati hrane preostali mornari?
7. Četrdeset posto jedne duži iznosi 6,8 cm. Koliko iznosi 32% te duži?
8. Ako je 20% ispitanika u jednoj anketi, u kojoj je učestvovalo 23780 ljudi, pozitivno odgovorilo na postavljeno pitanje, a 25% negativno, koliko ljudi nije dalo odgovor?
9. Izračunati brojnu vrijednost izraza:

   a) $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(-3^2\right) + 2 \cdot \left(1 - \frac{3}{2^2}\right)$,

   b) $\sqrt{1{,}69} - \frac{7}{5} \cdot \sqrt{2 + \frac{2}{49}} : \sqrt{(-2)^2} + 0{,}5 \cdot \sqrt{4}$.

10. Ako je $A = -\frac{2}{\sqrt{3}} - \sqrt{13^2 - \left(4\sqrt{3}\right)^2} + \frac{2}{9}\sqrt{27}$ i

    $B = \left(\sqrt{50} - 3\sqrt{72} + \sqrt{18} - \sqrt{2}\right) \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$,

    Odrediti: $A^2 - B^2 + (A - B)^2$

11. Izračunati brojnu vrijednost izraza: $\frac{2ab}{a^2 - b^2} - \frac{a + b}{a^2 + b^2}$, ako je $a = -2$, $b = -3$.
12. Riješiti jednačine: a) $2 - \sqrt{1 - x} = 0{,}\dot{5}$, b) $2(5x - 4)^2 = 98$.
13. U voćnjaku ima onoliko redova, koliko ima voćaka u jednom redu. Ako je ukupan broj voćaka 441, koliko ima redova?

Irena Pavićević

IX RAZRED

Mnogougao. Tačka, prava i ravan.

I nivo

1. Odrediti d_n, D_n i S_n za: a) osmougao; b) tridesetpetougao.
2. Poznata su četiri ugla petougla: 82º, 73º, 95º i 48º. Odrediti mjeru petog ugla.
3. Pravilnom dvanaestouglu odrediti: d_n, D_n, S_n, α, α_1 i φ, a zatim ga konstruisati ako je poluprečnik njegove opisane kružnice 5 cm.
4. Odrediti mnogougao i naći mu: a) D_n, S_n ako je $d_n = 7$;
   b) d_n, D_n ako je $S_n = 540^\circ$.
5. Da li postoji mnogougao kome je: a) $S_n = 1620^\circ$; b) $S_n = 1180^\circ$?
6. a) Sa koliko je tačaka određena: i) prava, ii) ravan?
   b) U kom odnosu mogu biti dvije prave u: i) ravni, ii) prostoru?
7. Date su tri nekolinearne tačke u ravni. Koliko duži, pravih i polupravih je određeno sa tim tačkama?
8. Data je kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Navesti:
   a) prave koje su sa pravom $p(AA_1)$:
      i) paralelne, ii) normalne, iii) mimoilazne;
   b) ravni koje su sa ravni $\pi(BCC_1)$: i) paralelne, ii) normalne.
9. Data je kosa duž AB, $A \in \pi$. Tačka B je od ravni π udaljena 7 cm, a dužina projekcije duži AB je 5 cm. Odrediti dužinu duži AB.
10. Tačke A i B su sa iste strane ravni π, a njihove projekcije na ravan su redom tačke C i D. Ako je AC=3 cm, BD=8 cm i AB=13 cm, naći dužinu projekcije.

II nivo

1. Konstruisati pravilan šestougao ako je: a) njegova površina $24\sqrt{3}\ cm^2$;
   b) manja dijagonala $6\sqrt{3}\ cm^2$.
2. Konstruisati pravilan mnogougao, čija stranica ima dužinu 2 *cm*, kod koga:
   a) spoljašnji ugao je pet puta manji od unutrašnjeg ugla;
   b) unutrašnji ugao je za 120º veći od spoljašnjeg ugla;
   c) spoljašnji i unutrašnji ugao su u razmjeri 2 : 3.
3. Ako je ukupan broj dijagonala mnogougla: a) 27, b) 230, odrediti zbir njegovih unutrašnjih uglova.
4. Koliki je ugao između simetrala dva susjedna unutrašnja ugla pravilnog mnogougla, kod koga je: a) $D_n = 20$, b) $D_n = 135$.

5. a) Odrediti S_n ako je ukupan broj dijagonala pet puta veći od broja stranica.
   b) Odrediti odnos spoljašnjeg i unutrašnjeg ugla mnogougla kod koga je ukupan broj dijagonala osamnaest puta veći od broja dijagonala iz jednog tjemena.
6. Data je kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Odrediti:
   a) prave određene tjemenima kocke, koje sa pravom $p(BB_1)$ obrazuju ugao od 45º,
   b) ravan određenu tjemenima kocke, koja sa ravni $\pi(DCC_1)$ obrazuje ugao od 45º.
7. U ravni je dato pet različitih tačaka. Koliko je pravih određeno sa tim tačkama? (Razmotriti sve situacije.)
8. Tačke A i B su sa iste strane ravni π. Ako je AB = 6 cm, odrediti dužinu projekcije na ravan π ako prava kojoj pripadaju tačke A i B sa ravni π obrazuje ugao od:
   a) 60º, b) 45º, c) 30º.
9. Tačke A i B su sa raznih strana ravni π. Neka je $A'B'$ projekcija duži AB na ravan π. Ako je AA' = 7 cm, AB = 13 cm i $A'B'$ = 5 cm, odrediti rastojanje od tačke B do ravni π.
10. Ravni α i β su paralelne. Date su duži AC i BD takve da tačke A i C pripadaju ravni α, a tačke B i D ravni β. Dužine ortogonalnih projekcija ovih duži su redom 10 cm i 21 cm. Naći dužine duži AB i CD ako je duž CD za 11 cm duža od duži AB.

Ana Vuković

ZADACI SA TAKMIČENJA
(Olimpijada znanja 2017.)

Zadaci za VII razred

1. Data su četiri cijela broja. Biraju se parovi tih brojeva (njih 6) i računaju njihovi zbirovi. Četiri najveća zbira iznose 24, 27, 36 i 48. Odrediti ostala dva zbira i date brojeve.
2. Na šahovsku ploču 10x10 kod koje je donje lijevo polje bijelo, postavljeno je 50 žetona tako da nikoja dva nisu na istom polju. Pri tom 25 žetona zauzima donju lijevu četvrtinu ploče, a preostalih 25 gornju desnu četvrtinu. Neka su X, Y, Z redom tri uzastopna polja (horizontalno, vertikalno

ili dijagonalno). Ako se dva žetona nalaze na poljima X i Y i ako je polje Z slobodno, žeton s polja X može se premjestiti na polje Z preskočivši žeton na polju Y. Može li se žeton koji se nalazi na bijelom polju u jednom trenutku naći na crnom polju? Može li se, konačnim nizom takvih poteza, premjestiti svih 50 žetona na donju polovinu ploče?

3. Dat je pravougaonik *ABCD.* Simetrala dijagonale AC siječe stranicu AB u tački E, a stranicu CD u tački F, tako da je trougao *EBC* jednakokraki. Odrediti ugao *DFE.*

4. Da li je tačno da se od 100 brojeva može izabrati 15, tako da razlika bilo koja dva broja od izabranih brojeva bude djeljiva sa 7? Kakav je odgovor ako se broj 15 zamijeni brojem 16?

Zadaci za VIII razred

1. Za dati četvorocifreni broj X označimo s Y broj dobijen tako što od X oduzmemo devetostruku vrijednost trocifrenog broja dobijenog od prve tri cifre broja X, zatim oduzmemo devetostruku vrijednost dvocifrenog broja dobijenog od prve dvije cifre broja X i na kraju devetostruku vrijednost jednocifrenog broja jednakog prvoj cifri broja X. Ako znamo da su cifre broja X prosti brojevi i da je proizvod cifara broja X pet puta veći od Y, odrediti moguće vrijednosti broja X.

2. Na šahovsku ploču 10x10 kod koje je donje lijevo polje bijelo, postavljeno je 50 žetona tako da nikoja dva nisu na istom polju. Pri tom 25 žetona zauzima donju lijevu četvrtinu ploče, a preostalih 25 gornju desnu četvrtinu. Neka su X, Y, Z redom tri uzastopna polja (horizontalno, vertikalno ili dijagonalno). Ako se dva žetona nalaze na poljima X i Y i ako je polje Z slobodno, žeton s polja X može se premjestiti na polje Z preskočivši žeton na polju. Može li se žeton koji se nalazi na bijelom polju u jednom trenutku naći na crnom polju? Može li se, konačnim nizom takvih poteza, premjestiti svih 50 žetona na donju polovinu ploče?

   (Napomena: isti zadatak je dat i takmičarima VII razreda.)

3. Dat je kvadrat ABCD. Na pravoj koja sadrži tačke A i C izabrana je tačka K takva da je AC = BK. Odrediti ugao $\sphericalangle BKC$.

4. Odrediti sva nenegativna cjelobrojna rješenja x i y jednačine

   $x + 5y = 4\sqrt{xy} + 1.$

Zadaci za IX razred

1. Ribar je prodavao x kilograma ribe dva dana na pijaci sa sljedećim uspjehom:

a) da je prodao 5 kg ribe više nego što je ukupno (za oba dana) prodao, ostalo bi mu petina ribe koju je donio na prodaju;

b) prvi dan je prodao dva kilograma više od dvije trećine prodate ribe po cijeni y eura;

c) jedan kilogram su mu pojele mačke;

d) drugi dan je prodao ostatak po cijeni α eura i tog dana zaradio $\frac{1}{y}$ puta manje novca nego prvi dan;

Ako je na pijacu iznio cjelobrojnu količinu kilograma ribe i uvijek je prodavao za cjelobrojno eura po kilogramu, koliko je ribe mogao donijeti na prodaju?

2. Data je kvadratna ploča veličine 2017 m $\times$ 2017 m i 2015 kvadratnih stubića dužine dijagonale $\frac{36}{217}$ m koji su raspoređeni na toj ploči.

a) Dokazati da u datoj ploči postoji bar jedan pravougaonik dimenzija 36 m $\times$ 56 m u kom nije centar niti jednog od stubića.

b) Dokazati da postoji bar jedan pravougaonik dimenzija 36 m $\times$ 56 m u kom se ne nalazi ni jedan dio od datih 2015 stubića.

3. Dokazati da je bar jedan paran broj od četvorocifrenih brojeva dobijenih permutacijom cifara broja 2017 takav da nije jednak razlici kvadrata dva prirodna broja.

4. U četvorouglu *ABCD* važi AB = BC = 3, ADC = 139° i ABC = 82°. Dokazati da se normale iz tačaka A i C na duži AD i DC, respektivno, sijeku na krugu opisanom oko trougla ADC. Izračunati dužinu duži BD.

Rješenja zadataka za VII razred

Rješenje 1. zadatka: Označimo tražene brojeve sa a, b, c i d. Bez smanjenja opštosti, pretpostavimo da je $a < b < c < d$. Očigledno, dva najveća zbira su $c + d = 48$ i $b + d = 36$. Odavde je $c - b = 12$, odnosno $c = b + 12$. Što se preostalih zbirova tiče, imamo dvije mogućnosti:

1) $b + c = 27$ i $a + d = 24$. Uvrštavajući $c = b + 12$ dobijamo $2b + 12 = 27$,

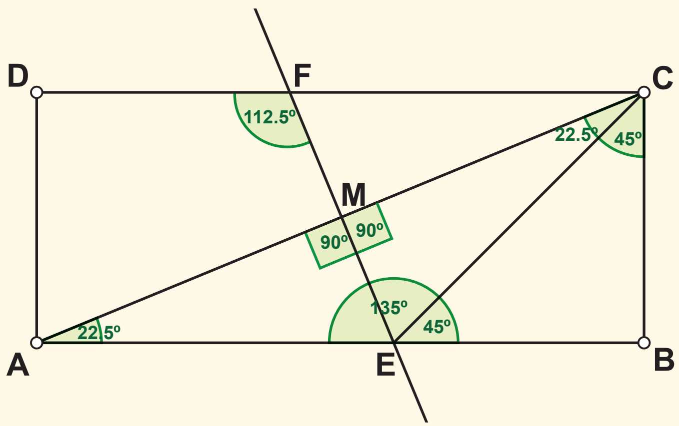
odnosno b = 15,5 što je nemoguće, jer je b cio broj. Dakle, ovaj slučaj odbacujemo.

2) b + c = 24 i a + d = 27. Uvrštavajući c = b + 12 dobijamo 2b + 12 = 24, odnosno b = 6, c = 18, d = 30, a = –3.

Preostala dva zbira su a + b = 3 i a + c = 15.

Rješenje 2. zadatka: Vidimo da je broj bijelih polja na donjoj lijevoj četvrtini ploče 13, dok je crnih polja 12. Isto je i na gornjoj desnoj polovini ploče (tj. broj žetona koji su na crnim poljima je manji od broja žetona koji su na bijelim poljima). Pri svakom potezu, žeton ne mijenja boju polja na kom se nalazi tako da je zahtjev iz zadatka neispunjiv.

Rješenje 3. zadatka: Neka je tačka M sredina dijagonale AC. Trouglovi *AME* i *CME* su podudarni (zajednička stranica EM, stranice AM i CM su jednake, ∢AME = ∢EMC = 90°, stav *SUS*), pa je trougao ACE jednakokraki. Kako je trougao *EBC* jednakokraki i ∢*EBC* = 90°, to je ∢BEC = 45°. Uglovi CEA i BEC su suplementni, pa je ∢CEA = 135°. Iz ovoga slijedi da je ∢EAC = ∢ACE = 22,5°. Iz trougla AEM vidimo da je ∢FEA = 77,5°, a pošto su uglovi FEA i DFE suplementni, to je ∢DFE =112,5°.



Rješenje 4. zadatka: Primijetimo da je razlika dva broja djeljiva sa 7 ako i samo ako ti brojevi daju iste ostatke pri dijeljenju sa 7. Ostaci (mogući) pri dijeljenju sa 7 su 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Ako ne bismo mogli izabrati 15 brojeva sa traženim svojstvom, to znači da najviše 14 od njih daje ostatak 0, najviše 14 daje ostatak 1,..., najviše 14 njih daje ostatak 6. No, tada bismo imali najviše 7 · 14 = 98 < 100. Dakle, moguće je izabrati 15 brojeva takvih da razlika bilo koja dva bude djeljiva sa 7.

Ako se broj 15 zamijeni brojem 16, tada je odgovor negativan. Recimo ako su dati brojevi 1, 2, 3,..., 100. Među njima brojevi 7, 14, 21,...,98 (ima ih 14), pri dijeljenju sa 7 daju ostatak nula. Brojevi 1, 8, 15,..., 99 (njih je 15) daju ostatak 1, brojevi 2, 9, 16,..., 100 (njih je opet 15) daju ostatak 2; zatim brojevi 3, 10, 17,..., 94 (ima ih 14) daju ostatak 3. Slično imamo po 14 brojeva koji daju ostatke 4, 5, 6. Dakle, ne možemo izdvojiti 16 brojeva, takvih da je razlika bilo koja dva djeljiva sa 7.

Rješenja zadataka za VIII razred

Rješenje 1. zadatka: Neka je X = $\overline{abcd}$ = 1000a + 100b + 10c + d. Lako se vidi da je Y = a + b + c + d. Kako je X pet puta veći od Y, to vrijedi

$$5(a+b+c+d) = \overline{abcd} \Rightarrow 5|abcd. \tag{1}$$

Kako su svi brojevi a,b,c,d prosti i 5|abcd, slijedi da je bar jedan od brojeva a,b,c,d jednak 5. Radi određenosti, neka je a = 5. Odavde i iz (1), dobijamo

$$5 + b + c + d = bcd.$$

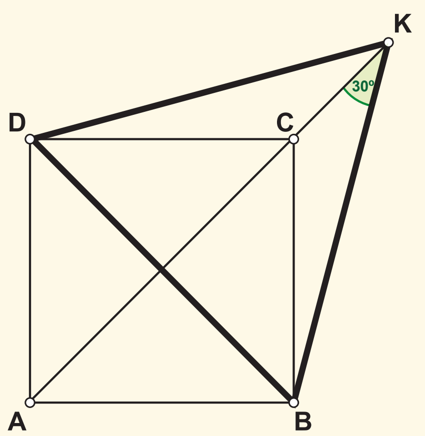
Odavde dalje slijedi da bar jedan od brojeva b, c, d mora biti jednak 2, jer je lijeva strana paran broj, a desna neparan. Neka je b = 2. Dakle,

$$7 + c + d = 2cd,$$

odakle slijedi da c ili d moraju biti jednaki 2. Uvrštavajući c = 2, zaključujemo da je d = 3. Moguće vrijednosti broja X dobijaju se permutacijama brojeva 2, 2, 3, 5.

Rješenje 2. zadatka: Vidimo da je broj bijelih polja na donjoj lijevoj četvrtini ploče 13, dok je crnih polja 12. Isto je i na gornjoj desnoj polovini ploče (tj. broj žetona koji su na crnim poljima je manji od broja žetona koji su na bijelim poljima). Pri svakom potezu, žeton ne mijenja boju polja na kom se nalazi tako da je zahtjev iz zadatka neispunjiv.

Rješenje 3. zadatka: Primijetimo da je prava p(A, C) simetrala duži BD, pa je DK = BK = AC = BD. Dobijamo da je trougao *BDK* jednakostranični. Odavde je $\sphericalangle BKD = 60°$, a kako je $p(AC)$ simetrala tog ugla, to je $\sphericalangle BKC = 30°$.



Rješenje 4. zadatka: Jednačinu možemo napisati u obliku

$$(\sqrt{x}-2\sqrt{y})^2+y=1\,.$$

Kako $\sqrt{xy}$ mora biti cjelobrojno, to je i $(\sqrt{x}-2\sqrt{y})^2$ cjelobrojno, pa kako su x i y nenegativni to su jedine mogućnosti

$\sqrt{x}-2\sqrt{y}=0$ i y = 1 ili $\sqrt{x}-2\sqrt{y}=1$ i y = 0.

Odavde lako vidimo da su jedina rješenja

(x, y) = (4,1) i (x, y) = (1, 0).

Rješenja zadataka za IX razred

Rješenje 1. zadatka: Označimo sa x količinu ribe koju je ribar donio na prodaju i sa P količinu ribe koju je prodao. Na osnovu uslova zadatka pod a), važi

$$x-(P+5)=\tfrac{1}{5}x \qquad (1)$$

Neka je z zarada prvog dana. Na osnovu uslova b) i d), imamo dalje

$$(\tfrac{2}{3}P+2)\,y=z$$

$$(\tfrac{1}{3}P-3)\,\alpha=\frac{z}{y}$$

Kombinujući ove dvije relacije s (1), dobijamo

$$\alpha=\frac{4x-10}{2x-35}=2+\frac{60}{2x-35}$$

odakle iz uslova cjelobrojnosti cijene i količine ribe slijedi da x može biti 18, 19, 20 ili 25.

Rješenje 2. zadatka: a) Ploču dimenzije 2016 m $\times$ 2016 m možemo podijeliti na tačno 2016 pravougaonika dimenzija 36 m $\times$ 56 m. Kako je ploča 2016 m $\times$ 2016 m sadržana u ploči 2017 m $\times$ 2017 m to i ona sadrži 2016 takvih pravougaonika. Na osnovu Dirihleovog principa, bar jedan od tih 2016 pravougaonika neće sadržati centar jednog od 2015 datih stubića.

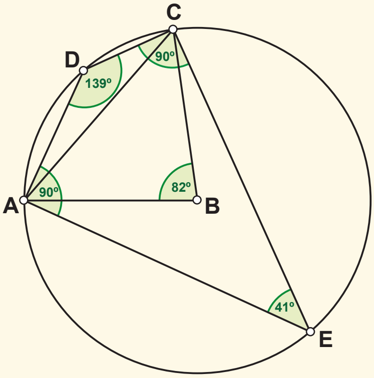
b) U ploču 2017 m $\times$ 2017 m očigledno možemo smjestiti mrežu od 2016 pravougaonika dimenzija $(36+\frac{36}{2017})$ m $\times$ $(56+\frac{36}{2017})$ m. Na osnovu Dirihleovog principa postoji pravougaonik P u kom nije centar ni jednog od datih stubića. Međutim, kako je dijagonala stubića $\frac{36}{2017}$ m tada u pravougaoniku *P'* dimenzija 36 $\times$ 56 koncentrično upisanog u pravougaonik P neće biti centar ni jednog od datih stubića.

Rješenje 3. zadatka: Posmatrajmo broj 1702.

Ako bi važilo

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = 1702$$

tada su a i b iste parnosti (kako je 1702 paran). Odatle slijedi da su i a – b i a + b parni tj. (a – b)(a + b) je djeljiv sa 4 dok 1702 nije. Kontradikcija.



Rješenje 4. zadatka: Neka se normale iz A i C redom na duži AD i DC sijeku u E. Četvorougao *ADCE* je očigledno tetivan jer mu je zbir naspramnih uglova 180°. Uočimo krug opisan oko trougla ACD (jer je krug određen jedinstveno s tri tačke).

Uočimo dalje kružnicu k s centrom u B poluprečnika 3. Ona prolazi kroz tačke A i C i siječe pravu DE u tačkama D' i D". Kako je ∢ABC = 82° to je ∢AEC = 41° i ∢ADC = 139° (ili obratno u odnosu na D' i D"). Kako je po uslovu zadatka ∢*ADC* = 139°, mora biti D' = D" odakle slijedi da je k kružnica opisana oko trougla ACD čiji je centar u B. Zato je |BD| = 3.

PRIPREMA ZA NASTAVNIKE

Škola	JU OŠ „Dušan Korać" Bijelo Polje
Nastavna jedinica	Računske operacije u skupu N
Predmet	Matematika
Razred	VI
Broj časa	3
Obrazovno-vaspitni ishod	Na kraju učenja učenik će moći da navede i primijeni osobine i zakone (pravila) skupa prirodnih brojeva N i skupa N_0 u rješavanju različitih aritmetičkih zadataka i zadataka iz svakodnevnog života
Ishodi učenja	Tokom učenja učenici će moći da pismeno sabiraju i oduzmaju, pomnože i podijele dva broja
Oblici rada	Frontalni, individualni i grupni
Metode i tehnike učenja	Metoda usmenog izlaganja, metoda razgovora, metoda igre
Nastavna sredstva	Projektor, pripremljeni nastavni listići, pano, slagalica, Power Point prezentacija
Nastavnica	Nevena Ljujić, prof.

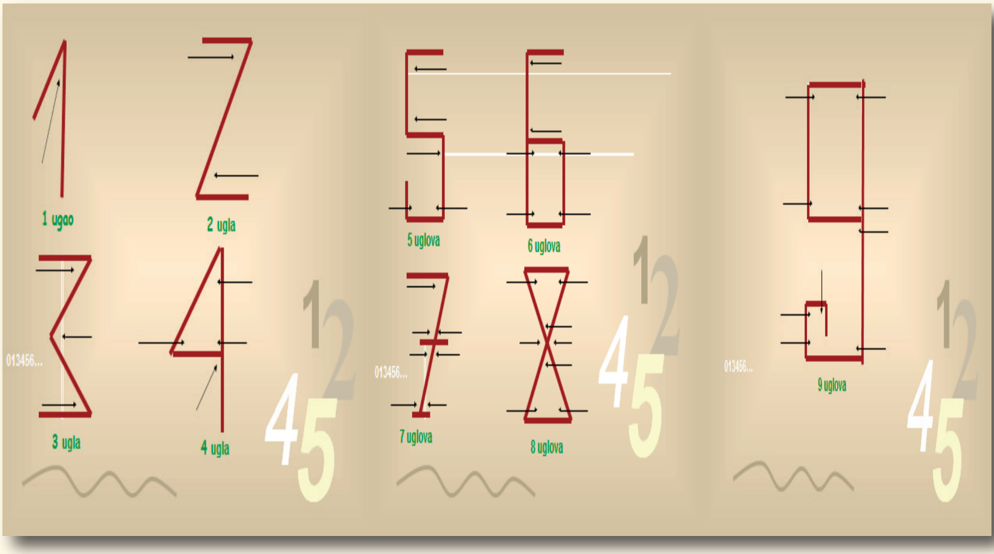
Tok časa

UVODNI DIO 1. KORAK / AKTIVNOST • Formiranje grupa - nastavnica je unaprijed pripremila materijal za formiranje heterogenih grupa. • Nakon što su formirane grupe nastavnica ističe ishod učenja **Računske operacije sa brojevima (u skupu N i N_0)** i zapisuje ga na tabli. • Daje učenicima uputstva za rad (sa učenicima ukratko ponoviti pravila grupnog rada). **GLAVNI DIO** 2. KORAK / AKTIVNOST • Učenici posmatraju prezentaciju **BROJEVI (PRILOG 1).** • Pažljivo posmatraju, razumiju i komentarišu priču o brojevima. • Odgovaraju na postavljena pitanja o računskim operacijama (u skupu N i N_0)i poštovanju redosljeda računskih operacija. 3. KORAK / AKTIVNOST • **MATEMATIČKA SLAGALICA (PRILOG 2)** • Slika je odštampana i zalijepljena na kartonu u boji , a zatim je isječena po linijama i dijelovi slagalice su stavljeni u koverat. • Učenici imaju zadatak da spoje rezultat sa odgovarajućim zadatkom. 4. KORAK / AKTIVNOST • **SKRIVENA RIJEČ (PRILOG 3)** • Učenici rješavanjem ponuđenih zadataka otkrivaju skrivenu riječ. • Unutar grupe se dogovaraju o podjeli zaduženja i samostalno rade u grupi. • Obavještavaju nastavnicu koja će izvršiti kotrolu rada i tačnosti kada grupa završi rad. • Na pripremljenom panou lijepe popunjeni nastavni listić. 5. KORAK / AKTIVNOST • **MALO IGRE – MALO ZNANJA (PRILOG 4)** • Učenici treba da pronađu pravi put krećući se od vrha i sabirajući brojeve preko kojih prelaze. Njihov zbir na dnu treba da je 39. Samo je jedan takav put. • Na pripremljenom panou lijepe popunjeni nastavni listić. **ZAVRŠNI DIO** 6. KORAK / AKTIVNOST • Izvještavanje grupa – svaka grupa izvještava koliko su zadataka uradili. • Najbolje i najvrednije nastavnica pohvaljuje. • Domaći zadatak (istraživačko-logički zadatak). • Kako da petoro djece podijeli pet jabuka iz korpe tako da svako dijete dobije po jabuku, a da jedna jabuka ostane u korpi?	Skup prirodnih brojeva N i prošireni skup N_0

Prilog 1: BROJEVI

Brojevi koje danas koristimo (0, 1, 2, 3, 4,...) razlikuju se od rimskih brojeva (I; II; III; IV itd.) i zovu se „arapski brojevi“. Arapskim brojevima se naziva sledećih 10 cifara: 0 (nula), 1 (jedan), 2 (dva), 3 (tri), 4 (četiri), 5 (pet), 6 (šest), 7 (sedam), 8 (osam) i 9 (devet).

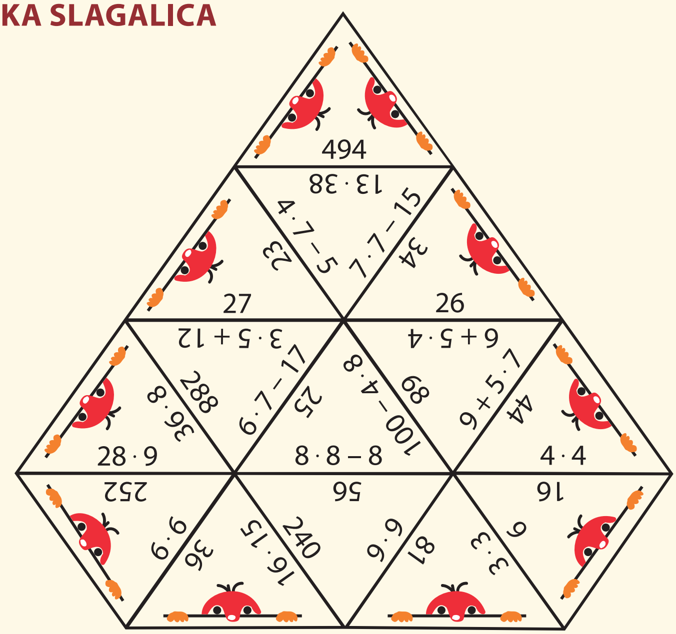
Da li ste se ikad zapitali zašto 1 znači „jedan“, 2 „dva“, a 3 „tri“ itd. Koja je logika arapskih cifara? Jednostavno, vrlo jednostavno...! **Radi se o uglovima!**



I najzanimljivije…

Pouka priče: ***Nikad nije kasno nešto da naučiš!***

Prilog 2: MATEMATIČKA SLAGALICA



Prilog 3: SKRIVENA RIJEČ

Ako tačno riješite zadatke otkrićete jedan matematički pojam.

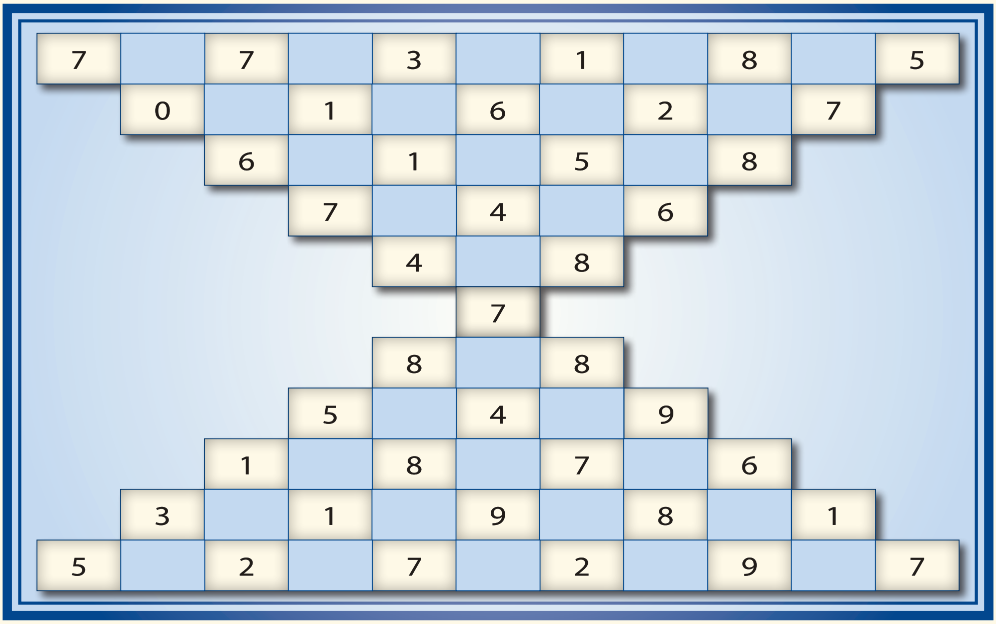
1. Prvi činilac je najveći jednocifreni broj, a drugi razlika brojeva 210 i 10. Izračunati proizvod.
2. Umanjenik brojeva je proizvod brojeva 140 i 6, a umanjilac 69. Izračunati razliku.
3. Prvi sabirak je 28, a drugi sabirak proizvod brojeva 150 и 4. Izračunati zbir.
4. Zbir brojeva 125 i 15 uvećati tri puta.
5. Razliku brojeva 160 i 8 povećati šest puta.
6. Jedan sabirak je 61 a drugi proizvod brojeva 123 i 3. Izračunati zbir.
7. Količnik brojeva 1131 i 87 uvećati devet puta.

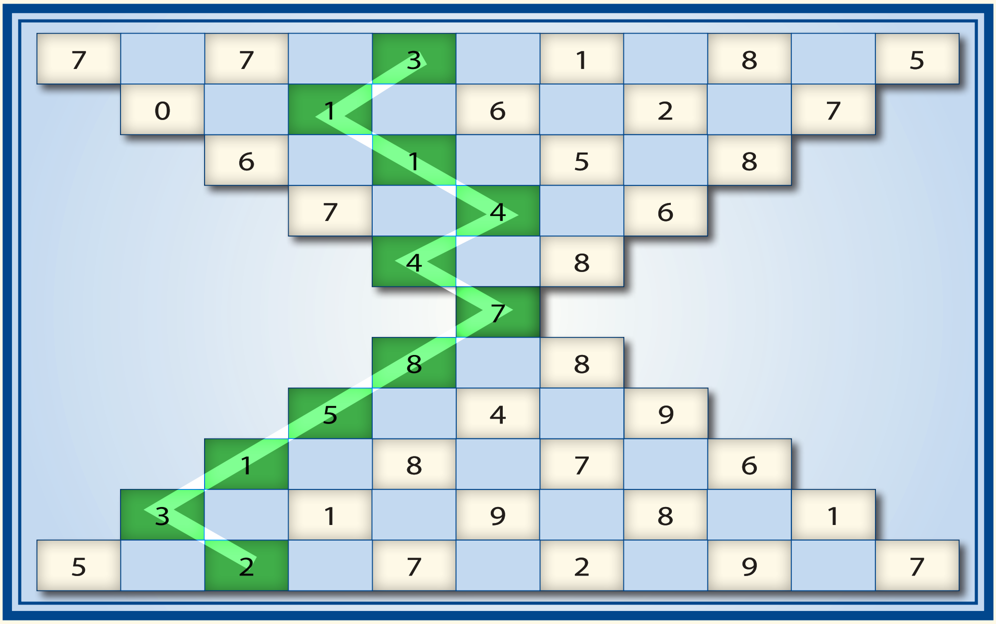
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.

J	**V**	**E**	**B**	**I**	**O**	**R**
420	**430**	**912**	**1800**	**117**	**628**	**771**

Prilog 4: **MALO IGRE – MALO ZNANJA**

Pronađi pravi put! Kreni sa vrha i sabiraj brojeve preko kojih prelaziš. Njihov zbir na dnu treba da bude 39. Samo je jedan takav put!





***Napomena**: Uz ovu pripremu (čas) ide Power point prezentacija.*

ODABRANI ZADACI

Odabrani zadaci su namijenjeni učenicima koji redovno prate nastavu matematike i odgovaraju zadacima iz nivoa „C“ ili „crvenim“ zadacima iz školskih zbirki zadataka. Oni su prelazni korak od zadataka sa redovne nastave ka takmičarskim zadacima. Mogu da se rješavaju samostalno, ali i na matematičkoj sekciji.

VI razred

1. U razredu je 10 djevojčica i 14 dječaka. Polovina djece ide u školu odbojke. Koliko najmanje dječaka trenira odbojku?
2. Na pravoj su date tačke A, B, C i D tako da je AB = 14, BC = 12, CD = 15 i AD = 13. Odrediti poredak tačaka A, B, C i D na pravoj. Izračunati rastojanje između dvije najudaljenije tačke.

VII razred

1. U jednakokrakom trouglu ABC, simetrala ugla A siječe krak BC u tački D tako da je duž AD podudarna osnovici. Izračunati ugao CDA.
2. Skup M sadrži sve petocifrene brojeve čiji je proizvod cifara 49, a skup N sadrži sve petocifrene brojeve čiji je proizvod cifara 21. Koji skup ima više elemenata, i koliko puta?

VIII razred

1. Na šahovskom turniru djevojčice čine više od 50%, a manje od 55% svih učesnika. Koliko je najmanje djevojčica na tom turniru i koliko je ukupno učesnika u tom slučaju?
2. Ako je NZD(a,b) = 12, a NZS(a,b) je kvadrat prirodnog broja, pronaći sve dvocifrene prirodne brojeve a i b koji zadovoljavaju ove uslove, a čiji je proizvod kub prirodnog broja.

IX razred

1. Marko ima 11 novčića od po 20 centi, a Petar 10 novčića od 50 centi. Koji je najmanji broj novčića koji oni mogu dati jedan drugome da bi imali iste sume novca?
2. Kocka ivice 9 cm je sastavljena od jediničnih kocki ivice 1 cm. Koliko se najviše kocki može vidjeti iz jedne tačke?

KONKURSNI ZADACI

Ovi zadaci su namijenjeni za samostalni rad učenika koji pokazuju veće interesovanje za matematiku. Mogu da posluže kao priprema za takmičenja.

VI razred

1. Na rođendanskoj žurci je bilo 26 dječaka i djevojčica. Svaki dječak je plesao sa različitim brojem djevojčica. Prvi dječak je plesao sa tri djevojčice, drugi sa četiri, treći sa pet, i tako redom sve do poslednjeg dječaka koji je plesao sa svakom djevojčicom. Koliko je djevojčica, a koliko dječaka bilo na toj žurci?
2. Tri kruške imaju masu koliko četiri jabuke, a četiri kruške koliko 5 banana. Ako 8 jabuka košta koliko 7 banana, šta je skuplje: kilogram jabuka ili kilogram banana?

VII razred

1. Na prvenstvu Crne Gore u šahu je učestvovalo 84 takmičara. Dokazati da se među njima može pronaći 10 takmičara tako da su svi iz različitih gradova, ili su svi iz istog grada!
2. Dat je broj $\overline{a10bcd}$, pri čemu su cifre a, b, c, i d različiti prosti brojevi. Odrediti sve brojeve ovog oblika koji su djeljivi sa 275.

VIII razred

1. Dokazati da broj $\sqrt{\overline{abcabc}}$ nije racionalan!
2. Ako je izraz $a^2 + 11ab + b^2$ djeljiv sa 13, dokazati da je izraz $a^2 - b^2$ takođe djeljiv sa 13!

IX razred

1. Koliko postoji uređenih parova trocifrenih prirodnih brojeva koji su rješenja jednačine: $3x + 4y + 2 = 2018$?
2. Na stranicama AD i AB pravougaonika ABCD su redom date tačke P i Q tako da je trougao CPQ jednakostraničan. Ako je tačka S sredina stranice CP dokaži da je trougao ABS jednakostraničan.

Rješenja konkursnih zadataka će biti objavljena u slijedećem broju. Pozivamo sve učenike koji riješe konkursne zadatke da nam čitko i precizno ispisana rješenja šalju na adresu redakcije. Obavezno napisati razred, odjeljenje, školu i grad. Imena onih čitalaca koji pošalju sasvim tačno i obrazloženo rješenje će biti objavljena u narednom broju.

Prof. dr Žarko Pavićević

MATEMATIKA ANTIČKE GRČKE

Antička Grčka se prostirala na jugoistoku Balkanskog poluostrva (teritoriju današnje Grčke), na istočne obale Male Azije, sjevernu obalu Afrike i jug Italije. Civilizacija antičke Grčke obuhvata period od 19. vijeka prije nove ere, pa do drugog vijeka nove ere, kada Grčka postaje rimska provincija.

Obuhvata:

– period mikenske kulture (1850-1200 g.p.n.e);
– period mračnog doba (1200-800 g.p.n.e);
– arhajsko[1] doba (800-500 g.p.n.e.)
– klasično doba (500-200 g.p.n.e.)

Uticaj grčke kulture traje sve do petog vijeka nove ere. Razvoj civilizacije tog perioda se završava spaljivanjem, po drugi put, Aleksandrijske biblioteke (390 godine nove ere).[2]

Period mikenske kulture karakterišu ogromne kamene građevine. U tom periodu postojala su dva pisma, starije koje nije dešifrovano i mlađe koje je dešifrovano. Zapisi mlađim pismom ne daju materijal na osnovu kojeg bi se moglo suditi o kulturnom životu tog perioda. Period mikenske kulture se završava „kataklizmičkim" dešavanjima (ratovima, prirodnim nepogodama, propadanjem poljoprivrede itd). Nastupa period mračnog doba. Broj stanovnika opada. Odvija se raseljavanje u Malu Aziju, na obale Jadranskog mora koje pripada Italiji, pa i na obale Sjeverne Afrike. U tom periodu Grci gube pismenost što pogubno djeluje na duhovni i kulturni život.

Kada su Grci u 9. vijeku p.n.e.ponovo došli u posjed pisma (posredstvom Feničana) počinje oporavljanje grčke kulture. Tada se udaraju temelji arhajskom dobu koje priprema teren za takozvano klasično doba grčke kulture, koje predstavlja zlatno doba tadašnje civilizacije, a može se reći i zlatno doba civilizacije čovječanstva uopšte.

U 8.vijeku p.n.e. nastaju dva velika spjeva Ilijada i Odiseja. Oni ne predstavljaju samo velelepno književno djelo, nego i začetak logičkog zaključivanja.

Tada nastaju moderne grčke države-polisi.[3] Stvara se nova elita – aristokratija, koja predstavlja okosnicu kulturnog i naučnog stvaralaštva Grčke.

---

1 Arhajski – od grčkih riječi arhaios što znači star, prestar

2 Godine 47 prije nove ere, za vrijeme Kleopatrine vladavine Egiptom, prvi put je spaljena Aleksandrijska biblioteka. Tada je uništeno oko 700 000 svijutaka papirusa, pisanih rukom, u kojima se nalazilo cjelokupno znanje tog vremena.

3 Polis – francuska riječ koja znači grad državu.

U klasičnom dobu dolazi do procvata grčke nauke i kulture. Posebno ističemo uticaj, koji su u tom vremenu na grčku kulturu imale kulture Vavilona i Egipta, kao i već pominjani Feničani. Dolazi do procvata filozofije, matematike, astronomije, fizike. Tada su stvarali najveći umovi toga doba i izvršena je i sistematizacija do tada „osvojenih“ znanja.

Osvajanjem Grčke od strane Rima (146. g.p.n.e) započinje slabljenje grčke kulture. Naime, grčka kultura je trajala još nekoliko vjekova, da bi potpuno nestala hristijanizacijom[4] Rimskog carstva.

Rezultati koje su Grci dobili u matematici predstavljaju temelje moderne matematike. Navodimo nekoliko najznačajnijih mislilaca – matematičara tog doba:

– Tales (624 – 540 g.p.n.e);
– Pitagora (580 – 501 g.p.n.e);
– Platon (429 – 348 g.p.n.e);
– Aristotel (384 – 322 g.p.n.e);
– Euklid (330 – 275 g.p.n.e);
– Arhimed (287 – 112 g.p.n.e).

Grci su dobro znali prirodne brojeve i razlomke. Kod njih su dilemu izazivali iracionalni brojevi. Iako su došli do spoznaje o postojanju iracionalnih brojeva, na primjer $\sqrt{2}$, oni iracionalne brojeve nijesu smatrali brojevima.

Geometriju su razvili, može se reći, do savršenstva. O tome najbolje govori čuveno Euklidovo djelo „Elementi“ koje se sastoji od XIII knjiga. Ono je preko 2200 godina dominiralo u učenju geometrije. Zbog toga ne treba da čudi da je ime Euklida sinonim za školsku geometriju.

Grci su razvili astronomiju. Zapanjujuće je kako su izračunali rastojanje Zemlje od Sunca. Prvi su uveli dokaz u matematiku (to je zasluga Pitagore i njegovih učenika), što predstavlja presudan momenat u nastanku matematike kao nauke.

Stari Grci su kroz aksiomatski[5] metod postavili temelje matematici, pa i nauci uopšte, na kojima ona i danas čvrsto stoji. Na kraju možemo reći da je antička Grčka ostavila čovječanstvu neprocjenjivo blago, znanje bez koga se ne može zamisliti današnja civilizacija.[6]

4 Hristijanizacija – preobraćanje u hrišćanstvo.

5 Aksiomatski metod – princip zasnivanja nauke gdje se polazi od očiglednih činjenica koje se ne dokazuju i osnovnih pojmova koji se ne definišu.

6 O grčkoj matematici, matematičarima i misliocima koje smo naveli u ovom tekstu ćemo pisati i u narednim brojevima. Iako su se matematikom prije Grka bavili Egipćani i Mesopotamci, o čemu ćemo, takođe, pisati u narednim brojevima, zbog doprinosa matematici ovaj prvi rad iz istorije matematike u „Dijagonali“ smo posvetili Starim Grcima.

ZANIMLJIVA STRANA

Zanimljivosti o matematičarima

Gaus (Karl Fridrih Gaus – njemački matematičar i naučnik, 1777-1855) je veoma rano pokazao svoju matematičku darovitost. Poznata je anegdota koja kaže da je Gausov učitelj zadao da se saberu svi brojevi od 1 do 100, ali na njegovo veliko iznenađenje, Gaus, koji je tada imao 7 godina, je odmah izračunao da je traženi zbir 5050. On je posmatrajući niz 1,2,3,4,...,98,99,100 zaključio da kada se saberu 1 i 100, 2 i 99, 3 i 98,... uvijek se dobije zbir 101. Takvih parova ima tačno 50 i traženi zbir je $50 \cdot 101 = 5050$. Ovaj postupak je nazvan „Gausov postupak“.

Zanimljivost o korijenima

Tokom srednjeg vijeka, kvadratni korijen broja često je procjenjivan pomoću formule:

$\sqrt{n} = \sqrt{a^2 + b} = a + \dfrac{b}{2a+1}$. Na primjer, $\sqrt{10} = \sqrt{3^2+1} = 3 + \dfrac{1}{3 \cdot 2 + 1} = \dfrac{22}{17}$.

Rekli su o matematici...

– „Čovjek je kao razlomak, čiji je brojilac ono što on jeste, a imenilac ono što misli o sebi. Što je imenilac veći, razlomak je manji.“

Lav Tolstoj
(ruski pisac, 1828-1910.)

– „Mi nikada ne postajemo matematičari, čak i ako naučimo napamet sve tuđe dokaze, ako naš um nije osposobljen da samostalno rješava postavljene probleme.“

Rene Dekart
(francuski filozof, matematičar i naučnik, 1596-1650.)

– „Iz matematike se mnogo toga ne zadrži u pameti, ali ako si jednom savladao, onda ćeš se po potrebi uvijek lako prisjetiti zaboravljenog.“

B.Ostogradski
(ukrajinski matematičar, 1801-1862.)

– „Algebra i geometrija čine jedinstvenu zemlju u kojoj gospodare tišina i mir.“

Marija Anjezi
(italijanska matematičarka i filozofkinja, 1718-1799.)

ZA MLADE RAČUNDŽIJE

Trougao, krug i kvadrat zamjenjuju određene brojeve. Odrediti te brojeve i izračunati traženi zbir.

▲ + ● = 13 ● – ■ = 5 ▲ – ■ = 2

▲ + ● + ■ = ?

(Rješenje: ▲ + ● + ■ = 16; ▲ = 5; ● = 8; ■ = 3)

LOGIČKI ZADACI

1. Zapisati nulu pomoću tri petice.
2. Između brojeva 5 □ 4 □ 6 □ 3 upisati jednu od računskih operacija: sabiranje, oduzimanje ili množenje tako da rezultat bude: a) 9; b) 17.
3. Marko je platio svesku 2 eura i još trećinu cijene sveske. Kolika je cijena sveske?
4. Kolika je vrijednost izraza: $\dfrac{(P\cdot R\cdot O\cdot I\cdot Z\cdot V\cdot O\cdot D)}{(R\cdot A\cdot Z\cdot L\cdot I\cdot K\cdot A)}$?

   Svako slovo je različiti jednocifren broj, a tačka između slova je znak za množenje.
5. Dato je deset kvadrata u nizu, jedan do drugog. Napisati ćirilicom **devet slova u deset kvadrata**, tako da u svakom kvadratu bude po jedno slovo! (Latinicom je rješenje lakše jer se pojedina slova pišu pomoću dva slova: LJ ili NJ.)

Uredništvo poziva nastavnike, učenike i sve čitaoce da nam šalju priloge za list: članke, odabrane zadatke, zanimljivosti, priloge za zabavnu matematiku itd.

Kompletan tiraž prvog broja „Dijagonale” će biti besplatno podijeljen svim nastavnicima matematike u osnovnim školama, kao i svim bibliotekama osnovnih škola u Crnoj Gori.

Naredni broj će biti moguće poručiti, odnosno, prijaviti se za pretplatu narednih brojeva. Sve informacije o pretplati i porudžbini narednih brojeva možete naći na sajtu Udruženja. Narudžbe slati putem mejla.

Broj žiro računa UNMCG je **550-18240-71** kod Societe Generale Montenegro banke.

Adresa redakcije je: Ul. Gojka Berkuljana br. 20, Podgorica.

Mail: udruznastmatem@gmail.com

www.unmcgwordpress.com