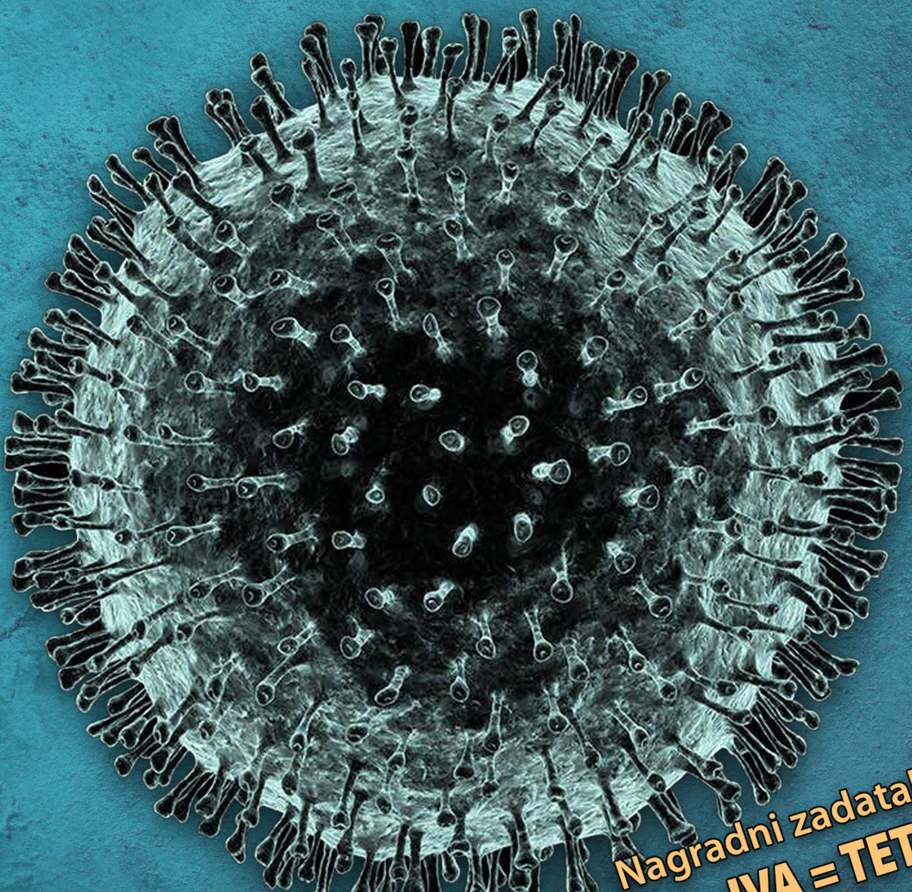
Udruženje nastavnika matematike Crne Gore

Dijagonala

Matematički list za učenike osnovnih škola

Cijena 1,50 €



Nagradni zadatak:

IVA · IVA = TETIVA

BROJ 8 - GODINA 2020.

Udruženje nastavnika matematike Crne Gore

Matematički list za učenike osnovnih škola – „**Dijagonala**", **broj 8**

Godina 2020. Cijena: 1,50 €

Glavni urednik: *mr Radomir Božović*

Odgovorni urednik: *Danijela Jovanović*

Redakcija: *Prof. dr Žarko Pavićević, Prof. dr Radoje Šćepanović, Miodrag Lalić, Prof. dr Milenko Mosurović, Snežana Irić, Aleksandra Vuković, Vanja Đurđić Kuzmanović, Irena Pavićević, Nevena Ljujić*

Lektura: *Milja Božović, prof.*

Korektura: *Danijela Jovanović, prof.*

Priprema za štampu: *Branko Gazdić*

Tiraž: *1000*

Štampa: *„Studio Branko" d.o.o. – Podgorica*

Zavod za školstvo je odlukom broj 01 – 1214/2 od 03.09.2018. godine preporučio časopis „Dijagonala" za korišćenje u osnovnim školama kao pomoćno nastavno sredstvo.

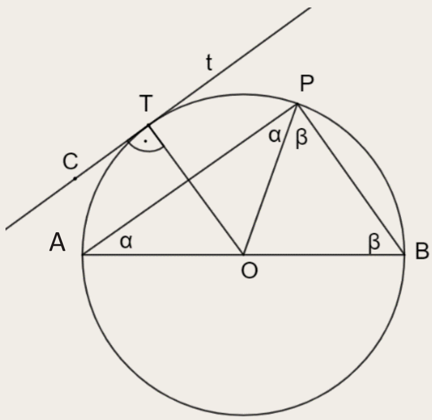
Sadržaj

Jovana Ćupić

UGAO NAD PREČNIKOM

Jedno od najvećih otkrića i pokretača naše civilizacije je točak, a točak u matematičkom rječniku je krug. Svako se bar jednom zadivio kako funkcioniše neka naprava kružnog oblika. Oni koji se ne bave matematikom najčešće i ne znaju da svi ti zupčanici, točkovi i razni koturovi, rade tako besprekorno zahvaljujući izuzetnim osobinama kruga. Teško je zamisliti koliko mogućnosti nudi jedna od najjednostavnijih figura. Krenimo najprije od jednostavne, ali matematički precizne definicije.

Krug je skup tačaka u ravni čija je udaljenost od neke tačke O te ravni manja ili jednaka datom rastojanju r.

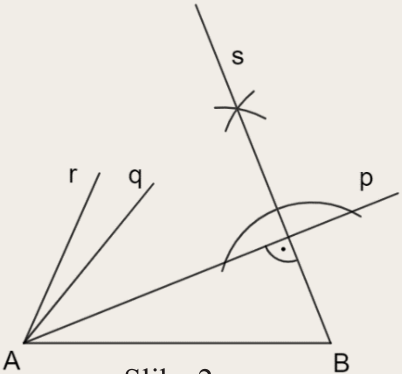


Slika 1.

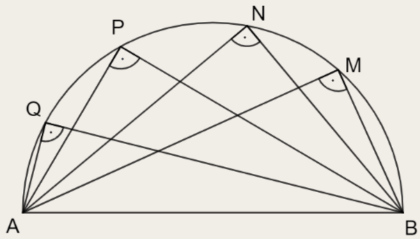
Tačka O te ravni je centar kruga, duž OT je poluprečnik kruga, AB je prečnik kruga. Prava t, koja sa krugom ima jednu zajedničku tačku T je tangenta kruga. Duži AB i BP su tetive. (Slika 1.) Za krug možemo reći da je idealna figura.

Ovdje ćemo se pozabaviti jednom izvanrednom osobinom, koju bi nematematičari mogli dobro iskoristiti. Ona se odnosi na $\measuredangle APB$, gdje je AB prečnik, a P tačka kruga. Ugao $\measuredangle APB$ je UGAO NAD PREČNIKOM.

U davnoj prošlosti dolazilo je do raznih nadmetanja i opklada u kojima su se takmičili matematičari protiv onih koji su podcjenjivali moć matematike. Anegdota o njemačkom matematičaru Adamu Riseu (1492 – 1559) govori o jednom takvom dvoboju. Jednom prilikom Rise je predložio tadašnjem najboljem geometru da se takmiče, ko će nacrtati više pravih uglova, čiji kraci prolaze kroz utvrđene tačke A i B. Koristili su šestar i lenjir. Geometar je odmah nacrtao više polupravih Ap, Aq, Ar..., a zatim konstruisao normale na poluprave (Slika 2.). Rise je nacrtao krug prečnika AB i uzimajući ma koju tačku kruga, vrlo brzo je nacrtao veliki broj pravih uglova (Slika 3.)



Slika 2.



Slika 3.

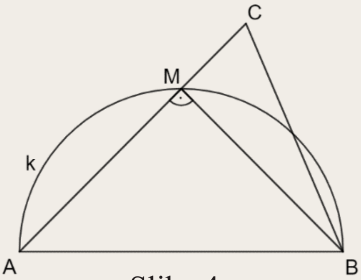
Geometar nije znao za ovu osobinu kruga, pa se šepurio kao pobjednik, sve dok mu Rise nije dokazao da je konstruisanje pravih uglova pomoću kruga ispravno. Tako je Rise, "običan" matematičar, uspio da pobijedi "velikog" geometra. Rise je prvo tačno formulisao pravilo, a zatim ga je dokazao.

UGAO NAD PREČNIKOM KRUGA JE PRAV.

Ovo tvrđenje je dokazao na sledeći način: Uočimo na Slici 1 jednakokrake trouglove AOP i BOP. (Duži OA, OB i OP su jednake.) Uglovi na osnovici jednakokrakog trougla su jednaki, pa je $\alpha = \measuredangle OAP = \measuredangle OPA$ i $\beta = \measuredangle OBP = \measuredangle OPB$. Koristeći se zbirom unutrašnjih uglova u trouglu ABP i $\measuredangle APB = \alpha + \beta$, dobićemo jednakost: $2\alpha + 2\beta = 180°$, $\alpha + \beta = 90°$, što znači da je ugao $APB = 90°$. Prethodno tvrđenje može se dobiti kao posledica teoreme: **Centralni ugao konstruisan nad nekom tetivom je dva puta veći od periferijskog ugla nad istom tetivom**, koja je dio redovnog gradiva za VIII razred.

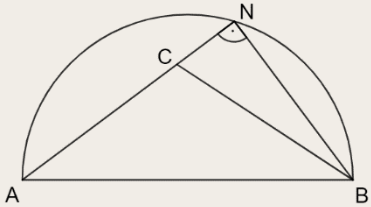
Zanimljivo je da su ovu osobinu koristili stari arapski matematičari. Jedan od njih, Abu Hasan, još u XIII vijeku je objašnjavao kako se brzo i lako može utvrditi da li je trougao tupougli, oštrougli ili pravougli. Abu Hasan je tvrdio da je dovoljno nacrtati duž čiji je prečnik najduža stranica, recimo AB, pa zavisno od toga da li je tjeme C van kruga, u krugu ili na krugu, ugao ACB je oštar, tup ili prav. Na osnovu toga određujemo da li je trougao oštrougli, tupougli ili pravougli.

Dokazaćemo da je ovo tvrđenje ispravno. Ako je tačka C na krugu, kao što je Rise dokazao $\measuredangle ACB = 90°$. Neka je C izvan kruga (Slika 4.). Označimo sa M tačku presjeka stranice AC sa krugom K. Tada je ugao AMB prav (ugao nad prečnikom), a ujedno je i spoljašnji ugao trougla MBC. Za spoljašnji ugao trougla važi jednakost $\measuredangle AMB = \measuredangle MCB + \measuredangle MBC$, odakle zaključujemo da je $\measuredangle ACB = \measuredangle MCB < \measuredangle AMB = 90°$, pa je ugao ACB oštar.



Slika 4.

Neka je C u krugu (Slika 5.). Produžimo stranicu AC do presjeka N sa krugom K. Sada je $\measuredangle ANB = 90°$, $\measuredangle ACB$ je spoljašnji ugao trougla BCN, pa slično prethodnom slučaju $\measuredangle ACB > 90°$, pa je $\measuredangle ACB$ tup.



Slika 5.

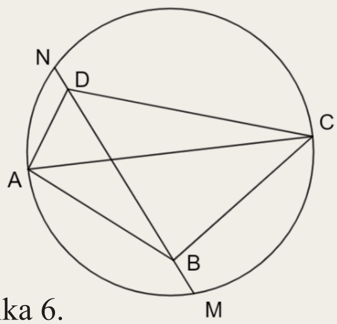
Ideju Abu Hasana možemo iskoristiti u sledećim zanimljivim zadacima:

Zadatak 1. Tri ugla jednog četvorougla su tupi. Dokazati da mu je veća ona dijagonala koja sadrži tjeme oštrog ugla.

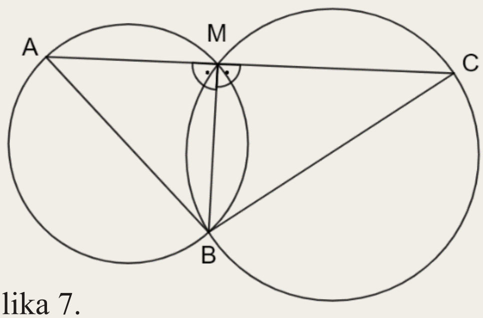
Dokaz. Neka je BCD jedini oštar ugao u četvorouglu $ABCD$. Konstruišimo krug prečnika AC (Slika 6.). Prema Abu Hasanovom pravilu tačke B i D su u krugu, pa je dijagonala BD manja od tetive MN, a samim tim je manja od prečnika, odnosno $BD < AC$.

Zadatak 2. Neka su A, B i C tri nekolinearne tačke i neka je M zajednička tačka krugova konstruisanih nad prečnicima AB i BC. Dokazati da su tačke A, C i M kolinearne.

Dokaz. Iz činjenice da tačka M pripada krugu prečnika AB, zaključujemo da je $\measuredangle AMB = 90°$ (Slika 7.), tačka M je na krugu prečnika BC, pa je i $\measuredangle BMC = 90°$. Kako je $\measuredangle AMC = \measuredangle AMB + \measuredangle BMC = 180°$, to je $\measuredangle AMC$ opružen, pa tačke A, M i C pripadaju jednoj pravoj.



Slika 6.



Slika 7.

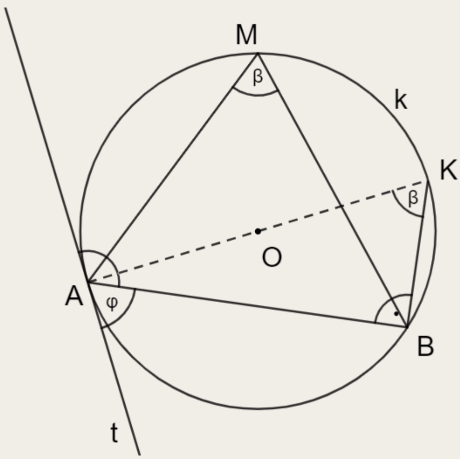
Osobina ugla nad prečnikom veoma često se koristi u obliku teoreme:

Centar kruga opisanog oko pravouglog trougla je središte hipotenuze. U vezi sa ovom teoremom treba zapamtiti i ovo: **Težišna linija koja odgovara hipotenuzi jednaka je polovini hipotenuze.**

Kao posledica teoreme o uglu nad prečnikom, u formi zadatka navodimo još jedno interesantno tvrđenje.

Zadatak 3. Ugao između tetive i tangente u tački dodira jednak je periferijskom uglu nad datom tetivom.

Dokaz: Označimo sa A tačku u kojoj se dodiruju tetiva AB i tangenta t. Neka je ugao AMB periferijski ugao nad tetivom AB. Dokazaćemo da je $\varphi = \sphericalangle AMB$. Iz tačke A konstruišimo prečnik AK i spojimo B sa K. Tada je ∢AKB = ∢AMB kao periferijski uglovi nad istom tetivom. Tada je $\varphi = \sphericalangle AKB$ kao uglovi sa normalnim kracima, jer je AK ⊥ t (ugao između tetive i tangente u tački dodira), i AB ⊥ BK (ugao nad prečnikom) što je i trebalo dokazati.



Zadaci za vježbu:

1. Dat je krug K i njegove tangente a, b i c. Prave a i b su paralelne, a prava c siječe a i b u tačkama A i B. Dokazati da krug prečnika AB prolazi kroz centar datog kruga.
2. Krugovi K_1 i K_2 dodiruju se spolja u tački A. Zajednička tangenta t datih krugova dodiruje krugove u tačkama B i C. Dokazati da je $\sphericalangle BAC$ prav.
3. Dat je krug K, njegov prečnik AB i tačka C van prave AB. Koristeći se samo lenjirom (tj. povlačeći samo prave) konstruisati normalu iz tačke C na pravu AB.

Već smo naučili ciklus while. Sada ćemo se upoznati i sa drugim tipovima ciklusa u programskom jeziku C++.

1. Naredba do ... while
   a. Opšti oblik naredbe do...while:

```
do {

 Naredbe1

} while(logicki uslov);
```

   b. Logički uslov (engl. boolean expression) mora imati vrijednost true ili false. Blok Naredbe1, se izvršava sve dok je logički uslov tačan (true); kada uslov postane netačan (false) izvršava se prva naredba iza naredbe while.
   c. Obratite pažnju da poslije while **mora da stoji** simbol tačka - zapeta.

2. Naredba **for**
   a. Opšti oblik naredbe for:

```
for (INICIJALIZACIJA; USLOV; POSLEDNJA NAREDBA) {
        NAREDBE;
}
```

   Npr. želimo da 1000 puta štampamo tekst „Dijagonala“:

```
for (int broj_ponavljanja = 0; broj_ponavljanja < 1000; broj_ponavljanja++){
  cout << "Dijagonala" << endl;
  }
```

   b. Prvo se izvrše naredbe koje se nalaze u INICIJALIZACIJA (u našem primjeru napravi se promjenljiva broj_ponavljanja i njena vrijednost se postavi na 0).
   c. Zatim se, isto kao i kod petlji while ili do… while petlje, provjeri da li je USLOV zadovoljen (u ovom primjeru, to je provjera da li je broj_ponavljanja manji od 1000).

d. Ako je uslov tačan (tj. true), izvršavaju se NAREDBE unutar petlje i nakon njih se izvrši POSLEDNJA NAREDBA. U našem slučaju to znači da se prvo štampa poruka, a zatim se broj_ponavljanja uveća za 1. Zatim se ponovo vraćamo na provjeru uslova, i tako dalje, sve dok je uslov tačan; ako uslov nije zadovoljen, petlja je gotova i program nastavlja dalje sa izvršavanjem.
e. Naredba for je ekvivalentna sa sljedećom petljom while:

```
INICIJALIZACIJA;
  while (USLOV) {
 NAREDBE;
 POSLEDNJA NAREDBA;
 }
```

f. Uvijek je moguće napisati petlju while ili petlju do...while koje rade isto što i petlja for.
g. Za naš primjer, odgovarajuća petlja while imaće sljedeći izgled:

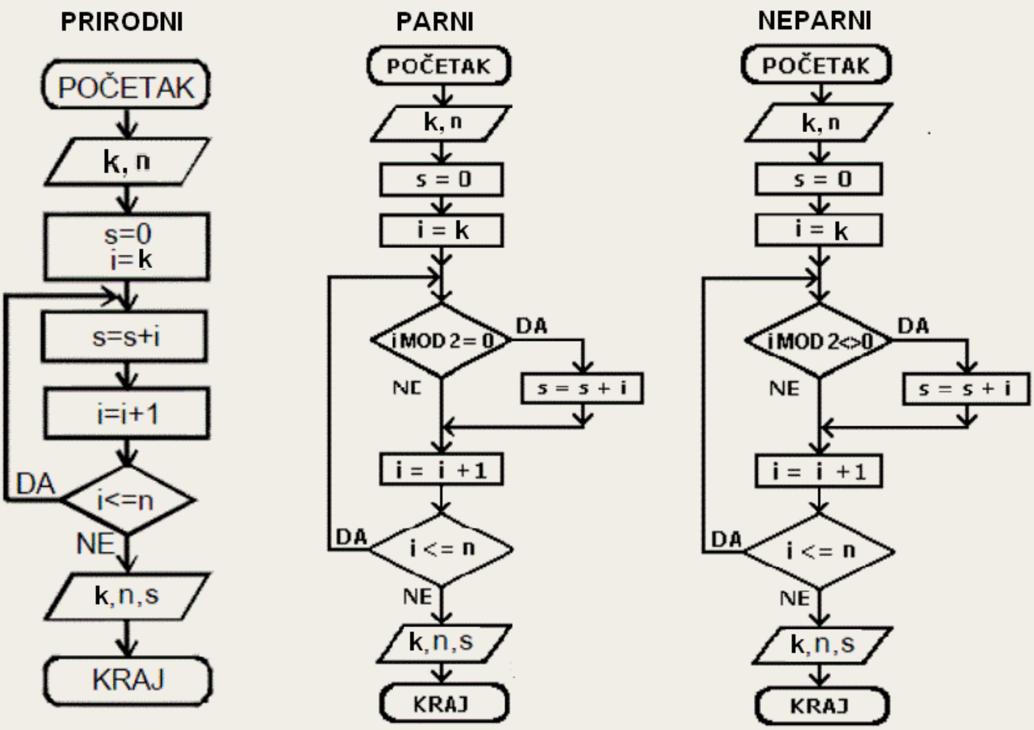
```
int broj_ponavljanja = 0;
while (broj_ponavljanja < 1000) {
        cout << "Dijagonala" << endl;
        broj_ponavljanja++;
 }
```

h. Na sljedećoj slici, koja je preuzeta sa petlja.org, možete vidjeti kako izgleda dijagram za naredbu for:

Pokazaćemo ove tipove ciklusa na više primjera.

Primjer 1: Učitati prirodne brojeve k i n (k ≤ n) i štampati: (a) brojeve k i n i zbir svih prirodnih brojeva od k do n; (b) brojeve k i n i zbir svih parnih prirodnih brojeva od k do n; (c) brojeve k i n i zbir svih neparnih prirodnih brojeva od k do n.

U ovom primjeru ciklusi su kontrolisani brojačem tj. znamo koliko puta će se izvršiti naredbe unutar ciklusa.



Rješenje (a):

```
int main() {
        int k= 10,  n = 20, s = 0, i = 1;
        cin >> k >> n;
        for (i=k; i<= n; i = i+1) {
                s = s + i;
        }
        cout << k << " " << n << " " << s  << endl;
        return 0;
}
```

Rješenje (b):

```
int main() {
	int s = 0, i, k, n;

	cin >> k >> n;

	i = k;
	while(i <= n) {
		if (i%2 == 0)
		{
			s = s + i;
		}
		i = i+1;
	}
	cout << k << " " << n << " " << s  << endl;
	return 0;
}
```

Rješenje (c):

```
int main() {
	int k= 10,  n = 20, s = 0, i;
	cin >> k >> n;

	i = k;
	do
	{
		if (i%2 != 0)
		{
			s = s + i;
		}
		i = i+1;
	}
	while(i <= n);
	cout << k << " " << n << " " << s  << endl;
	return 0;
}
```

Primjer 2: Broj bodova na testu je između 0 i 100. Napisati program koji učitava broj bodova svakog učenika na testu, sve dok se ne učita broj veći od 100 ili manji od 0, i štampa prosječan broj bodova na testu.

Ovo je primjer ciklusa koji **nije** kontrolisan brojačem – ne znamo koliko puta će se izvršiti naredbe u ciklusu.

Prvo rješenje: ciklus while

```
int main() {
        int broj = 0, suma = 0, x = 0;
        cin >> x; // ucitamo prvi broj
        while (x >= 0 && x <= 100)
        {
                broj++; // prebrojavamo koliko smo puta učitali
                suma += x; // uvećavamo zbir učitanih brojeva
                cin >> x; // učitavamo sljedeći broj
        }
        if (broj == 0){
                cout << "Nijedan učenik nije radio test!" << endl;
                }
                else {
                float prosjek = 1.0* suma / broj; // pretvaramo u realan broj
                        cout << prosjek << endl;
                }
                cout << "Kraj programa" << endl;
                return 0;
        }
```

Drugo rješenje: ciklus do-while

```
        int main() {
                int broj = 0, suma = 0, x = 0;
                do
                {
                        cin >> x;
                        if (x >= 0 && x <= 100){
                                broj++;
                                suma += x;
                        }
```

```
        } while (x >= 0 && x <= 100);

        if (broj == 0){
                cout << "Nijedan učenik nije radio test!" << endl;
        }
        else {
                float prosjek = 1.0* suma / broj;
                cout << prosjek << endl;
        }
        cout << "Kraj programa" << endl;
        return 0;
}
```

Treće rješenje: ciklus do-while sa upotrebom break

```
int main() {
        int broj = 0, suma = 0, x = 0;

        do
        {
                cin >> x;
                if (!(x >= 0 && x <= 100)){
                        break;
                }
                broj++;
                suma += x;
        } while (x >= 0 && x <= 100);

        if (broj == 0){
                cout << "Nijedan učenik nije radio test!" << endl;
        }
        else {
                float prosjek = 1.0* suma / broj;
                cout << prosjek << endl;
        }
        cout << "Kraj programa" << endl;
        return 0;
}
```

Četvrto rješenje: beskonačni ciklus sa upotrebom break

```
int main() {

    int broj = 0, suma = 0, x = 0;

    while (true) // beskonacni ciklus
    {
        cin >> x;
        if (x < 0 || x > 100){
            break;
        }
        broj++;
        suma += x;
    }

    if (broj == 0){
        cout << "Nijedan učenik nije radio test!" << endl;
    }
    else {
        float prosjek = 1.0* suma / broj;
        cout << prosjek << endl;
    }
    cout << "Kraj programa" << endl;
    return 0;
}
```

Zadaci za vježbu (`while`)

1. Unosi se cio broj n, a zatim n cijelih brojeva, po apsolutnoj vrijednosti manjih od 100000. Štampati najmanji od njih.
2. Unosi se cio broj n, a zatim n cijelih brojeva, po apsolutnoj vrijednosti manjih od 100000. Štampati tri najveća od njih u opadajućem poretku.
3. Unosi se cio broj n, a zatim n cijelih brojeva, po apsolutnoj vrijednosti manjih od 10^6. Štampati najveći mogući proizvod tri od učitanih brojeva. Obratite pažnju da brojevi mogu biti i negativni.
4. Unosi se cio broj n, a zatim 4n cijelih brojeva, po 4 u redu, koji predstavljaju vremena reli vozača u formatu [sati, minuti, sekunde, hiljadinke]. Štampati redne brojeve prvoplasiranog i drugoplasiranog vozača i 4 broja koja predstavljaju razliku između njihovih vremena.

ZADACI ZA VJEŽBU

VI razred

I nivo

1. Nacrtati:
   a) duž dužine 5 cm i konstrukcijski je podijeliti na 4 jednaka dijela.
   b) tup ugao $\alpha = 100°$ i konstrukcijski ga podijeliti na 8 jednakih djelova.
2. Konstruisati uglove od: a) $7° 30'$, b) $75°$, c) $105°$, d) $67° 30'$.
3. Izračunati proizvod i količnik brojeva preko razlomaka i u decimalnom zapisu: a) 0,8 i $2\frac{1}{2}$, b) 0,88 i $\frac{2}{5}$, c) $5\frac{1}{5}$ i 0,13, d) 0,35 i $\frac{7}{10}$.
4. Izračunati aritmetičku sredinu brojeva:
   a) 7,5; $2\frac{1}{8}$ i 2,5; b) 3,125; $2\frac{1}{8}$; 3,625 i $4\frac{3}{8}$.
5. Riješiti jednačine: a) $5 \cdot x = 7{,}125$; b) $x \cdot 2{,}5 = 5\frac{1}{4}$; c) $x : 3{,}25 = 2\frac{1}{4}$;
   d) $3\frac{1}{4} : x = 2{,}25$; e) $x : 5\frac{1}{5} = 12{,}625 + 2{,}375$.
6. Riješiti nejednačine: a) $5 \cdot x > 6{,}25$; b) $x \cdot 0{,}5 < 2\frac{1}{4}$; c) $x : 0{,}25 \geq 1\frac{1}{4}$;
   d) $3\frac{1}{4} : x < 1{,}125$; e) $x : \frac{1}{5} \leq 12 - 2{,}25$.
7. Pretvoriti u: a) procente $\frac{3}{4}$ i 0,25; b) razlomke i skratiti 5% i 25%;
   c) decimalne brojeve 8% i 115%.
8. Uporediti: a) 15% i $\frac{3}{20}$, b) 17% broja 2 i 3,4; c) 1,5% i 0,15.
9. Ako je 35% cijene jakne 70 eura, koliko košta ta jakna?
10. Bojana ima 200 eura. Sestri će dati 15%. Koliko eura će joj ostati?

II nivo

1. Nacrtati proizvoljan trougao i konstruisati mu simetrale unutrašnjih uglova. Šta primjećujemo?
2. Nacrtati: a) duž $AB = 5\ cm$, a zatim konstruisati duž $CD = \frac{5}{4} AB$;
   b) proizvoljan tup ugao α i konstrukcijski odrediti $\frac{3}{4}\alpha$.
3. Riješiti jednačine:
   a) $1{,}5 \cdot \left(\frac{x}{2} + 1\right) = 6{,}25$; b) $0{,}75 \cdot \left(8\frac{1}{2} - 0{,}5x\right) + \frac{1}{8} = 6{,}125$.
4. Riješiti nejednačine: a) $(5 \cdot x + 0{,}75) : 2{,}25 + 6{,}75 > 10$;

b) $\left(0{,}5 \cdot x + \frac{2}{5}\right) \cdot (10 - 7{,}25) + 1 < 11;$

c) $2 \cdot (x : 2 - 1{,}25) + 3{,}75 \leq 4\frac{3}{4}.$

5. Izračunati vrijednost izraza: $\frac{3}{4} \cdot 1\frac{1}{3} + (4-(3 \cdot \frac{5}{6} - \frac{1}{2} : 0{,}25)) : 0{,}5.$
6. Od izraza $\frac{5}{8} : 0{,}5 + 1{,}5 : 1\frac{1}{2} - 0{,}125 \cdot \frac{1}{8}$ oduzmi 25% broja recipročnog broju 2.
7. Iz apoteke je prvog dana prodato 0,2 ukupne količine medicinskog alkohola, a drugog dana trećina ostatka. U apoteci je ostalo 24 litra alkohola. Koliko litara alkohola je bilo u apoteci?
8. Prvog dana u prodavnici je prodato $\frac{3}{8}$ maski, a drugog 0,2 ostatka. Trećeg dana prodata je polovina novog ostatka i ostalo je 35 maski. Koliko je maski bilo u prodavnici?
9. Časovi matematike „Uči doma“ realizuju se 4 puta nedjeljno i ukupno traju 2 h 15 min. Prvi čas je trajao $\frac{3}{4}$ sata, drugi $\frac{2}{3}$ prvog časa, a treći 25% preostalog vremena. Koliko je trajao četvrti čas?
10. Za realizaciju TV časa iz matematike predviđeno je $\frac{3}{4}$ sata. Plan je da 20% predviđenog vremena bude prezentacija, a 25% preostalog vremena izrada zadataka. Da li je ostalo dovoljno vremena za prikazivanje filma o poznatim matematičarima, koji traje 26 minuta?

Danijela Jovanović,
JU Osnovna škola „Milorad Musa Burzan“, Podgorica

VII razred

I nivo

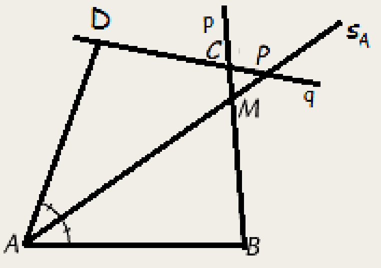
1. Riješiti jednačine: a) $\frac{7}{5}x = -1{,}8$; b) $\frac{9}{10} : x = -1{,}2$; c) $1 - \frac{x}{3} = 5$;
   d) $3x + \frac{3}{5} = -11{,}4$; e) $-3{,}8 - \frac{2}{3}x = \frac{1}{4}$.
2. Riješiti nejednačine:
   a) $\frac{3}{5}x < -0{,}3$; b) $0{,}75x > -\frac{9}{100}$; c) $0{,}01x - 0{,}01 \geq \frac{99}{100}$.
3. Izračunati vrijednost izraza: $\left(\frac{2}{3}x - y\right) : x$ ako je $x = -\frac{3}{5}$ i $y = 2{,}25$.
4. Izračunati unutrašnje i spoljašnje uglove četvorougla *ABCD* ako je:
   a) $\alpha = 39°$, $\gamma = 156°$, $\beta_1 = 97°$;
   b) $\alpha = \alpha_1$, $\beta = 121°$, $\gamma_1 = 88°$.

5. Dijagonala četvorougla $ABCD$ dijeli uglove kroz koje prolazi na uglove kod tjemena A od 39°36' i 63°24' odnosno uglove kod C 58°36' i 63°24'. Izračunati uglove tog četvorougla.
6. Dva pravougla trougla imaju zajedničku hipotenuzu i obrazuju četvorougao. Ako je oštar ugao jednog trougla 33°, a drugog 44°, koliki su uglovi tog četvorougla?
7. Iz tjemena D paralelograma $ABCD$ je povučena je visina na stranicu AB. Ugao između visine i stranice AD paralelograma je 25°. Odrediti unutrašnje uglove paralelograma.
8. Konstruisati pravougaonik ako su date: dijagonala $d = 6\ cm$ i stranica $b = 3\ cm$.
9. Izračunati osnovicu trapeza a ako je druga osnovica $b = 10{,}3\ cm$, a srednja linija $m = 8\frac{1}{2}\ cm$.
10. Pravougli trapez je dijagonalom podijeljen na dva trougla: pravougli i jednakostranični stranice 12 cm. Kolika je srednja linija trapeza?
11. Manja dijagonala romba jednaka je njegovoj stranici. Izračunati uglove romba. Ako je dužina stranice $a = 3{,}5\ cm$, izračunati obim romba.

II nivo

1. Riješiti jednačine:
   a) $-0{,}5\left(\frac{x}{5}+3\right)=0{,}25$; b) $-0{,}75\left(\frac{1}{2}-0{,}2x\right)+\frac{6}{5}=-1{,}6$.
2. Riješiti nejednačine: a) $4\cdot(3x+0{,}6)>0$;
   b) $\left(0{,}75x+\frac{2}{3}\right)\cdot(-7{,}2)<0$; c) $2\cdot|x|-1{,}25\leq 4\frac{3}{4}$.
3. Izletnik je krenuo prema jezeru krećući se brzinom od $4\frac{1}{4}$ *km/h*. Poslije dva časa za njim je krenuo drugi izletnik biciklom krećući se brzinom 10,625 *km/h*. Na jezero su stigli istovremeno. Koliko je daleko jezero od njihovog polazišta?
4. Izračunati unutrašnje uglove četvorougla ako važe jednakosti:
   $\beta=\alpha+42°$, $\gamma=\beta-20°$ i $\delta=\alpha+\beta$.
5. Simetrale uglova na osnovici jednakokrakog trapeza obrazuju ugao od 142°. Izračunati unutrašnje uglove trapeza.
6. Dijagonala trapeza dijeli srednju liniju na odsečke 2 cm i 4 cm. Odrediti dužine osnovica?

7. Izračunati obim jednakokrakog trapeza ako su:
   a) njegove osnovice 10 *cm* i 4 *cm* a jedan unutrašnji ugao 60°,
   b) jedan unutrašnji ugao 30°, srednja linija 10 *cm*, a visina 4 *cm*.
8. Simetrala ugla α siječe pravu $p(B,C)$ u tački M i pravu $q(D,C)$ u tački P. Ako je ugao $\measuredangle BAD = 70°$, $\measuredangle BMA = 60°$ i $\measuredangle MPC = 45°$, naći uglove četvorougla $ABCD$.



9. Konstruisati kvadrat ako je dat poluprečnik opisane kružnice $r_o = 2{,}5$ cm.
10. Konstruisati deltoid $ABCD$ ako je $AB = AD = 8$ *cm*, $BD = 12$ *cm* i $\measuredangle D = 60°$.
11. Koliko se šestocifrenih brojeva može napisati pomoću cifara 0, 1, 2, 3, 4 i 5 u kojima se cifre: a) ne ponavljaju, b) ponavljaju?
12. Na polici se nalaze 15 knjiga od kojih su 7 na ruskom, 3 na engleskom i 5 na francuskom jeziku. Na koliko različitih načina se mogu raspodijeliti knjige na polici, ako knjige na istom jeziku moraju biti jedna uz drugu.

Daliborka Šljivančanin, JU OŠ „Vlado Milić”, Podgorica

VIII razred

I nivo

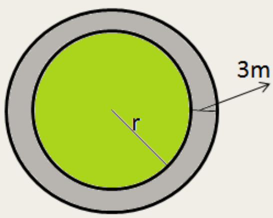
1. Odrediti u koordinatnoj ravni sljedeće tačke:
   $A(3, 1)$, $B(-1, 4)$, $C(-2, -3)$, $D(0, -5)$.
2. Odrediti obim trougla čija tjemena imaju koordinate: $A(-2, 0)$, $B(4, 0)$, $C(0, -5)$.
3. Date su tačke $A(-2, -2)$ i $B(2, 2)$ u koordinatnom sistemu. Ako je duž AB stranica kvadrata $ABCD$, odrediti koordinate:
   a) tjemena C i D;
   b) presječne tačke dijagonala tog kvadrata.
4. Nacrtati grafik zavisnosti pređenog puta od vremena putovanja konstantnom brzinom od 9 *km/h* za prva 4 sata putovanja.

5. Veličine x i y su direktno proporcionalne.

x	-8	-4		$\frac{4}{3}$	
y		-3	0		6

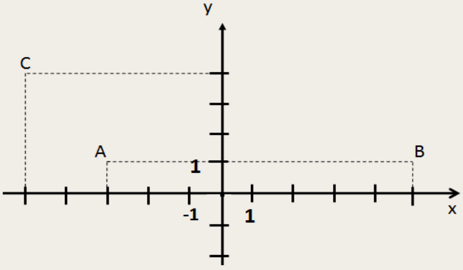
a) Napisati formulu te zavisnosti;
b) Popuniti tabelu;
c) Nacrtati grafik te funkcije.

6. Dva kruga imaju obime $O_1 = 18\pi\ cm$ i $O_2 = 16\pi\ cm$. Za koliko se razlikuju njihove površine:
a) $68\pi\ cm^2$; b) $17\pi\ cm^2$; c) $2\pi\ cm^2$; d) $\pi\ cm^2$. Zaokružiti slovo ispred tačnog odgovora.
7. Površina polovine kruga je $32\pi\ cm^2$. Izračunati obim kruga.
8. Duž $AB = 10\ cm$ je poluprečnik jedne, a prečnik druge kružnice. Za koliko se razlikuju obimi, a za koliko površine krugova određenih tim kružnicama?
9. Površina nekog kruga je $10{,}48\ cm^2$. Odrediti njegov obim i dužinu najveće tetive.
10. Na kružnoj stazi obima 400 m napravljena je pješačka staza širine 3 m i kružni travnjak kao na slici. Koliko najmanje žice treba da se ogradi travnjak? Potrebne vrijednosti zaokružite na jedinice.



II nivo

1. Izračunati obim i površinu trougla ABC čija su tjemena data na slici.

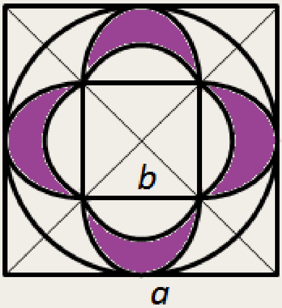


2. Odrediti koordinate centra i dužinu poluprečnika kruga opisanog oko trougla ABC, ako je $A(2,1)$, $B(6, 1)$, $C(2,4)$.

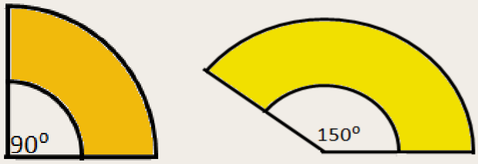
3. Dat je jednakokraki trapez $ABCD$ čije su osnovice $AB = 16\ cm$, $CD = 8\ cm$ i visina $h = 3\ cm$. Neka se prave AD i BC sijeku u tački F i neka je FE visina trougla ABF. Izračunati:

   a) krak AF trougla ABF; b) visinu FE trougla ABF.

4. Koji dio velikog kruga zauzima osjenčena figura na slici1 ako je stranica ***a*** većeg kvadrata dva puta veća od stranice ***b*** manjeg kvadrata sa slike?



Slika 1



Slika 2

5. Izračunati obim i površinu obojenih figura na slici 2 ako je poluprečnik većeg isječka 4 cm, a manjeg 3 cm.

6. Oko jednakostraničnog trougla čiji je obim 54 cm opisan je krug. Kolika je dužina kružnog luka nad jednom stranicom tog trougla?

7. Stranica romba je 5 cm. Površina kruga upisanog u taj romb je $4\pi\ cm^2$. Izračunati dužine dijagonala i površinu tog romba.

8. U kvadrat upiši krug, zatim u taj krug upiši kvadrat, pa u taj kvadrat upiši krug a zatim u taj krug upiši kvadrat. U kom su odnosu površine prvog i poslednjeg kvadrata? Zaokružiti slovo ispred tačnog odgovora.

   a) 16 : 1; b) 8 : 1; c) 4 : 1; d) 2 : 1.

9. Dijagonala jednakokrakog trapeza je dva puta duža od njegove srednje linije. Ako je visina trapeza $h = 12\sqrt{3}\ cm$ kolika je površina trapeza?

10. Dužina srednje linije pravouglog trapeza je 14, a njegove osnovice a i b se odnose kao 4 : 3. Izračunati površinu trapeza ako dužina jednog njegovog kraka iznosi 80% dužine drugog kraka.

11. Površina kružnog prstena koji obrazuju opisani i upisani krug jednakostraničnog trougla je $12\pi\ cm^2$. Izračunati obim i površinu tog trougla.

Ljujić Nevena, JU OŠ „Dušan Korać", Bijelo Polje

IX razred

I nivo

1. Poluprečnik osnove valjka je 14 cm, a visina valjka je 9 cm. Izračunati površinu valjka.
2. Obim osnove valjka je 10π m, a visina je 6 m. Kolika je površina omotača?
3. Zapremina valjka je 16π cm^3, a poluprečnik osnove mu je 2 cm. Kolika je površina valjka?
4. Izračunati površinu kupe ako je poluprečnik osnove $r = 16$ cm i izvodnica $s = 20$ cm.
5. Poluprečnik osnove prave kupe je 6 cm a visina kupe je 11 cm. Izračunati zapreminu kupe.
6. Površina lopte jednaka je 225π cm^2. Naći njenu zapreminu.
7. Ako je poluprečnik lopte 5 cm, izračunati površinu i zapreminu te lopte.
8. Ako je površina lopte 36π cm^2, izračunati poluprečnik te lopte.
9. Izračunati površinu i zapreminu lopte ako je površina velikog kruga $16\pi\, cm^2$.
10. Odrediti površinu lopte ako je njena zapremina 288π cm^2.

II nivo

1. Površina valjka je 48π cm^2, a površina omotača je 30π cm^2. Izračunati: a) visinu valjka; b) zapreminu valjka.
2. Površina omotača valjka je 144π cm^2, a visina je dva puta veća od poluprečnika. Izračunati zapreminu valjka.
3. Ako visinu ravnostranog valjka ($2r = H$) povećamo za 1 cm, tada će se površina omotača povećati za 10π cm^2. Izračunati:

   a) poluprečnik osnove;

   b) dužinu dijagonale osnog presjeka ravnostranog valjka.
4. Površina kupe je 24π cm^2 a površina omotača 15π cm^2. Odrediti površinu osnog presjeka.
5. Kružni isječak kome odgovara ugao od 120° i poluprečnik od 5 cm savijen je u omotač kupe. Izračunati površinu te kupe.
6. Izračunati površinu i zapreminu kupe ako je osni presjek jednakostraničan trougao površine $36\sqrt{3}$ cm^2.

7. Zapremina prave kupe je $800\pi\ cm^2$. Izračunati površinu kupe ako su prečnik osnove i visine u razmjeri $5 : 6$.
8. Ako se poluprečnik lopte uveća za $1\ cm$, površina lopte poveća se za $36\pi\ cm^2$. Odrediti zapreminu prvobitne lopte.
9. Presjeci dvije ravni i lopte imaju površine $49\pi\ cm^2$ i $4\pi\ cm^2$, a rastojanje između tih ravni koje su sa raznih strana centra lopte iznosi $9\ cm$. Naći površinu lopte.
10. Površina lopte opisane oko prave pravilne četvorostrane prizme osnovne ivice $a = 4\ cm$ je $P = 36\pi\ cm^2$. Izračunati površinu dijagonalnog presjeka.

Slađana Bošković, JU OŠ „Radojica Perović", Podgorica

ZADACI ZA VJEŽBANJE
(za eksternu provjeru znanja)

U zadacima 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 zaokružiti slovo ispred tačnog odgovora.

1. Prirodan broj ima tri cifre. Kada se njegove cifre pomnože, dobija se 135. Koji rezultat se dobija ako se njegove cifre saberu?

   A) 14; B) 15; C) 16; D) 17; E) 18.

2. Marko je učestvovao u trci koja se sastojala iz 5 krugova. Vremena kada je Marko prošao kroz startnu tačku data su u tabeli. Koji krug je Marko prošao za najkraće vrijeme?

	vrijeme
start	**09:55**
Nakon 1. kruga	**10:26**
Nakon 2. kruga	**10:54**
Nakon 3. kruga	**11:28**
Nakon 4. kruga	**12:03**
Nakon 5. kruga	**12:32**

   A) 1; B) 2; C) 3; D) 4; E) 5.

3. Vrijednost izraza: $2 - 3 \cdot 4^2 + \sqrt{(-3)^2}$ je:
   A) – 50; B) – 48; C) – 43; D) 0; E) 1.

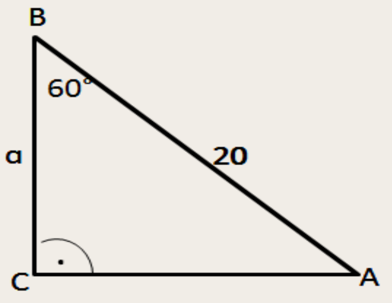
4. Tri učenika su zajedno kupili fudbalsku loptu. Prvi je uložio $\frac{1}{5}$, a drugi $\frac{1}{4}$ ukupne sume novca. Koliko je, u procentima, uložio treći učenik?

A) 18; B) 20; C) 45; D) 50; E) 55.

5. Koji od sljedećih četvorouglova ima tačno jednu osu simetrije?

A) pravougaonik; B) romb; C) deltoid; D) nejednakokraki trapez; E) pravougli trapez.

6. Kolika je dužina stranice $\boldsymbol{a}$ na slici?

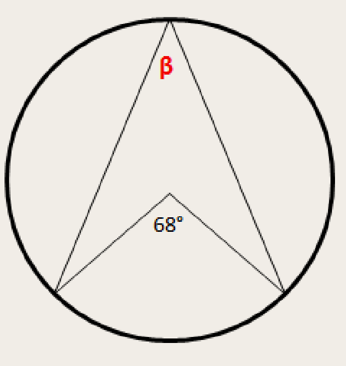


A) 10; B) $10\sqrt{2}$; C) $10\sqrt{3}$; D) 40; E) 60.

7. Vrijednost izraza $(x + 2)(x - 3)$ je:

A) $2x - 1$; B) $x^2 - 6$; C) $x^2 + x - 6$; D) $x^2 - x - 6$; E) $x^2 - 5x + 6$.

8. Ugao β na slici iznosi:



A) 34°; B) 38°; C) 40°; D) 44°; E) 50°.

9. Koja je od datih funkcija opadajuća i njen grafik sadrži koordinatni početak:

A) $y = 2x + 1$; B) $y = 0{,}5x + 3$; C) $y = 0{,}5x + 10$; D) $y = -0{,}5x$;

E) $y = -x - 1$.

10. Ako je u pravouglom trouglu hipotenuza četiri puta duža od njene visine, onda su oštri uglovi tog trougla u odnosu:

A) 1 : 4; B) 1 : 5; C) 1 : 2; D) 2 : 3; E) 3 : 2.

11. Koji od datih izraza se ne može napisati u obliku kvadrata zbira ili kvadrata razlike?

A) $x^2 + 1 - 2x$; B) $x^2 + x + \frac{1}{4}$; C) $x^2 + 2x + 4$; D) $0{,}25 - 2x + 4x^2$;

E) $x^2 - x + 0{,}25$.

12. Dokazati da je vrijednost izraza $\frac{\sqrt{50} - \sqrt{8} + \sqrt{200}}{\sqrt{2}}$ prirodan broj. Koji je to broj?

13. Od 150 tona rude dobijene su 3 tone metala. Koliko se metala dobija od 220 tona rude?

14. Koristeći formulu za razliku kvadrata izračunati proizvod $399 \cdot 401$.

15. Odrediti najveći cijeli broj koji je rješenje nejednačine

$(x - 2)^2 - 5 > (x + 3)^2$.

16. Romb stranice $a = 5$ *cm* i visine $h = 4$ *cm* rotira oko jedne svoje stranice. Odrediti: a) površinu, b) zapreminu dobijenog obrtnog tijela.

17. Granitni stub oblika pravilne četvorostrane prizme osnovne ivice $a = 60$ *cm* i visine H = 80 *cm*, završava se pravilnom četvorostranom piramidom bočne ivice $s = 45$ *cm*.

Izračunati masu stuba ($\rho = 2{,}3\ g/cm^3$). (Uputstvo $m = V \cdot \rho$).

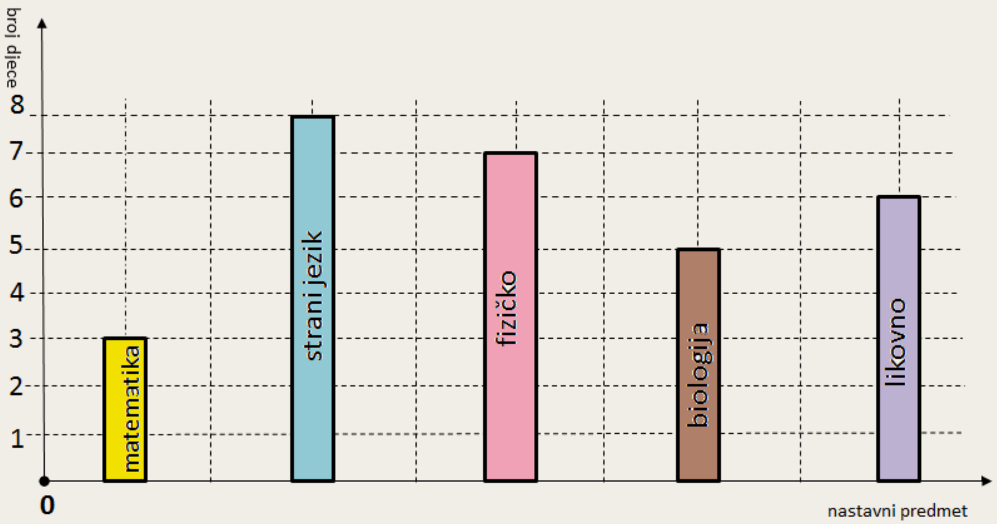
18. Svježe šljive sadrže 90% vode, a suve 12% vode. Koliko se kilograma suvih šljiva dobija od 440 *kg* svježih?

19. Trakastim dijagramom je prikazano istraživanje gdje su se učenici jednog odjeljenja izjašnjavali koji predmet najviše vole: matamatiku, strani jezik, fizičko vaspitanje, biologiju ili likovnu kulturu.

a) Koliko je učenika učestvovalo u anketi?

b) Koliko je učenika odabralo matematiku?

c) Koji predmet najviše vole učenici?



Rješenje zadatka sa naslovne strane Dijagonale 7:

AAB + ABA + BAA = BCCB

A = 5, B = 1, C = 2

Imena učenika koji su uspješno riješili nagradni zadatak iz prošlog broja

1) Vasilije Andrović, VI-2 JU OŠ „Meksiko“, Bar

2) Iva Nikolić, VII-1 JU OŠ „Luka Simonović“, Nikšić

3) Vojislav Šibalić, VII-4, JU OŠ „Radojica Perović“, Podgorica

4) Milena Popović, VI-6, JU OŠ „Maksim Gorki“, Podgorica

5) Adelisa Cikotić, VIII, JU OŠ „Trpezi“, Petnjica

ODABRANI ZADACI

VI razred

1. Dvije porodice imaju po troje djece i svaka po dva blizanca. Proizvod broja godina djece u svakoj porodici je 36, a zbirovi godina djece i jedne i druge porodice su jednaki. Godine djece jedne razlikuju se od godina djece druge porodice. Koliko godina imaju ova djeca?
2. Drvena kocka zapremine 1 m^3 obojena je spolja crveno, pa je onda razrezana na kubne decimetre.
   a) Koliki je broj manjih kocki koje:
      1) imaju tri obojene strane,
      2) imaju dvije obojene strane,
      3) imaju jednu obojenu stranu,
      4) nemaju obojenih strana?
   b) Kolika je ukupna površina svih manjih kocki koje su dobijene razrezivanjem velike kocke (izrazi u m^2)?
3. Dat je ugao sa tjemenom u tački A i tačke B i C, tako da je jedna na jednom, a druga na drugom kraku tog ugla. Odrediti konstrukcijom tačku M tako da ona bude jednako udaljena od krakova datog ugla i uz to da bude $MB = MC$.
4. Majka je kupila jabuke. Vlado je pojeo $\frac{1}{3}$ svih kupljenih jabuka i još dvije jabuke. Maja je pojela $\frac{1}{4}$ svih jabuka i još jednu jabuku. Nada je pojela $\frac{1}{2}$ one količine jabuka koja je bila preostala poslije Vlada i Maje. Poslije toga je ostalo samo $\frac{1}{6}$ prvobitne količine jabuka koje je majka kupila. Koliko je jabuka majka kupila?

VII razred

1. Simetrale uglova kod tjemena A i B paralelograma $ABCD$ sijeku se u tački T. Dokazati da je trougao ABT pravougli.
2. Ako se paralelogram obima 2004 cm i sa oštrim uglom od 30° presiječe pravom, dobiju se dva romba. Kolika je površina jednog od dva nastala romba?
3. Dat je pravougaonik $ABCD$ i duž BE koja je normalna na dijagonalu AC. Ako ja $AC = 4 \cdot BE$, izračunati uglove koje obrazuje dijagonala AC sa stranicama pravougaonika.

4. Grafitna olovka košta pola eura, hemijska olovka 1 €, a naliv pero 5 €. Kako možemo za 20 € kupiti 20 nabrojanih artikala?

VIII razred

1. Radnici A i B zaradili su izvjesnu sumu novca, koju treba da podijele u odnosu 5 : 3. Blagajnica je pogriješila, pa im je tu sumu novca podijelila u odnosu 2 : 3, tako da je radnik B dobio 36 eura više nego što je trebalo.

   a) Koliku su sumu novca zaradili radnici A i B?

   b) Koliko je novca trebalo da dobije svako od njih?

2. Osnovice trapeza su $a = 25$ cm, $b = 15$ *cm*, a krak $c = 8$ *cm*. Odrediti krak d i površinu tog trapeza, ako je poznato da je zbir uglova na većoj osnovici prav ugao.

3. Izračunati poluprečnik opisanog kruga jednakokrakog trougla čija je osnovica $a = 12$ *cm* i krak $b = 10$ *cm*.

4. Odrediti a, b, c, d tako da izraz $a^2 + d^2 - 2b(a + c - b) + 2c(c - d)$ ima najmanju vrijednost.

IX razred

1. Oko tetraedra je opisana i u njega upisana kupa.

   a) Odrediti odnos zapremina te dvije kupe.

   b) Ako je ivica tetraedra $a = \sqrt{6}$ cm, odrediti zapreminu dijela prostora između omotača ove dvije kupe.

2. Čaša ima oblik valjka prečnika 7 *cm* i visine 6 *cm*. U flašu zapremine $1{,}5l$ može se presuti voda iz približno:

   a) 7; b) 6; c) 8 takvih čaša.

   Zaokružiti tačan odgovor ($\pi \approx \frac{22}{7}$).

3. Date su dvije kocke jednakih ivica. U prvu kocku je upisana lopta, a u drugu valjak. Koliki je odnos zapremina lopte i valjka?

4. Koliko rješenja u skupu prirodnih brojeva ima jednačina $3x + 8y = 1999$? Napisati formulu za izračunavanje nepoznate x, odnosno y.

Vanja Đurđić-Kuzmanović, JU OŠ „Oktoih“, Podgorica
Dubravka Lekić, JU OŠ „Radojica Perović“, Podgorica

KONKURSNI ZADACI

VI razred

1. Broj učenika u jednoj školi je između 200 i 300. Zna se da je dječaka tri puta više nego djevojčica. Takođe se zna ako učenici te škole stanu u redove po 6 ili po 10, u oba slučaja je cio broj redova. Koliko ta škola ima učenika?
2. Jednog dana u jednom odjeljenju broj odsutnih učenika bio je jednak šestini prisutnih učenika. Kada se još jedan od prisutnih učenika razbolio, broj odsutnih učenika bio je jednak petini prisutnih učenika. Koliko učenika ima u tom odjeljenju?

VII razred

1. U školi su održana tri takmičenja. U svakom od njih učestvovalo je po 60 učenika. Na jednom takmičenju učestvovalo je 20 učenika, a na dva 35 učenika. Koliko je učenika učestvovalo na sva tri takmičenja?
2. Baka je podijelila svojim unukama jabuke. Prvoj je dala trećinu svih jabuka i još $\frac{1}{3}$ jabuke, drugoj četvrtinu preostalih jabuka i $\frac{3}{4}$ jabuke, a trećoj petinu preostalih jabuka. Koliko je baka imala jabuka i koliko ih je dobila svaka od unuka, ako je poslije podjele baki ostalo 16 jabuka?

VIII razred

1. Neka su $h_{a,}$, h_b i h_c visine trougla ABC. Ako je $\left(\frac{h_c}{h_a}\right)^2 + \left(\frac{h_c}{h_b}\right)^2 = 1$, onda je trougao pravougli. Dokazati.
2. Izračunati površinu pravouglog trougla čiji je obim 36 cm, ako za stranice tog trougla važi: $\frac{a+b}{c} = \frac{7}{5}$.

IX razred

1. Ako su a i b cijeli brojevi takvi da je broj $a^2 + ab + b^2$ djeljiv sa 9, onda su brojevi a i b djeljivi sa 3. Dokazati.
2. Za koje vrijednosti parametra m će se prave
   (p): $mx + (2m+3)y + m + 6 = 0$ i
   (q): $(2m+1)x + (m-1)y + m - 2 = 0$ sjeći na ordinatnoj osi?

Nataša Mrdak Kankaraš, JU OŠ „Vladimir Nazor", Podgorica

RJEŠENJA KONKURSNIH ZADATAKA IZ PROŠLOG BROJA

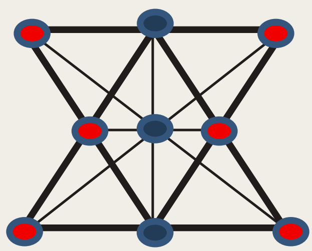
VI razred

1) Rade je nabavio 9 sadnica kivija. Radi boljeg oprašivanja i većeg prinosa, Rade je sadnice rasporedio u 10 redova, tako da u svakom redu budu po 3 sadnice. Postoje „muške" i „ženske" biljke kivija. „Muške" ne donose plodove, već služe samo za oprašivanje. Da bi se sve biljke maksimalno oprašile, mora se u svaki red postaviti bar jedan „muški" kivi. Kako je Rade propisno zasadio kivi sa minimalnim brojem „muških" biljaka?

2) Dat je skup $S = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$. Odrediti $A \cap B \cap C$ ako je
$A = \{a | a \in S \text{ i } \frac{a}{6} \in S\}$
$B = \{b | b \in S \text{ i } (\frac{b}{2} + \frac{b}{5}) \in S\}$
$C = \{c | c \in S \text{ i } \frac{c^2}{5} \geq c\}$.

Rješenja:

1. Pogledati sliku („Muške" biljke obojane su plavom, a „ženske" crvenom bojom)



2. Kako se skup A sastoji od onih članova koji su elementi skupa S i koji ispunjaju uslov da je i njihova šestina element datog skupa, direktnom provjerom dobijamo da je $A = \{0, 6, 12\}$. Elementi skupa B su ujedno i elementi skupa S, ali je potrebno da zbir njihove polovine i petine bude takođe u skupu S, pa je tako $B = \{0, 10\}$. Za skup C, osim to da su mu svi elemeti ujedno i elementi skupa S važi da je petina kvadrata svakog od elemenata tog skupa veća ili jednaka samom članu, pa je
$C = \{0, 6, 8, 10, 12\}$. Tako je $A \cap B \cap C = \{0\}$.

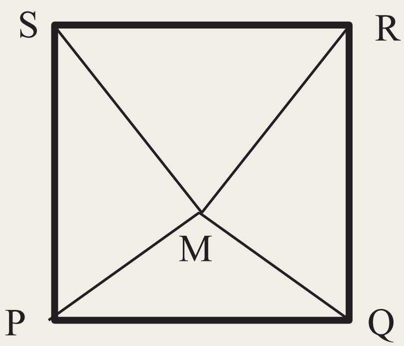
VII razred

1) U ravni kvadrata $PQRS$ data je tačka M tako da su duži RM i SM podudarne. Dokazati da su uglovi $\measuredangle SPM$ i $\measuredangle MQR$ jednaki.

2) Konstruisati jednakostranični trougao ako je poznata razlika stranice i visine trougla: $a - h$.

Rješenja:

1. Da bismo dokazali jednakost traženih uglova dovoljno je dokazati podudarnost trouglova PMS i QRM. Jasno je da je $PS = QR$ (stranice kvadrata). Takođe, u zadatku je dato da je $RM = SM$. Osim toga, trougao RSM je jednakokraki, pa su i uglovi $\measuredangle RSM$ $\measuredangle SRM$ jednaki, a samim tim i uglovi MSP i MQR. Iz ovih jednakosti slijedi podudarnost trouglova PMS i QRM, što je dokaz da su uglovi $\measuredangle SPM$ i $\measuredangle MQR$ jednaki.



2. Neka je ABC traženi jednakostranični trougao, a - njegova stranica i h visina. Označimo na stranici AC tačku M tako da je $CM = h$. Tada je $AM = a - h$. Znamo i da je $\measuredangle CAB = 60°$ jer je $\triangle ABC$ jednakostraničan. Označimo sa N podnožije visine h iz tjemena C na stranicu AB. Trougao CMN je jednakokraki, sa uglom pri vrhu od 30°. Kako su uglovi tog trougla kod tjemena M i N jednaki i iznose po 75°, to je $\measuredangle AMN = 115°$ kao spoljašnji ugao trougla AMN. Sada je lako konstruisati trougao AMN jer mu znamo sve uglove i stranicu AM. Konstrukcijom tog trougla odredićemo dužinu stranice a, jer je $AN = \frac{a}{2}$.

VIII razred

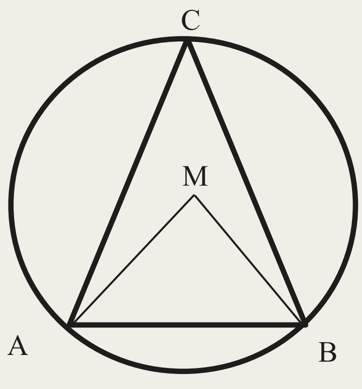
1) Trougao ABC upisan je u krug poluprečnika 10 cm. Ako se zna da je $AC = BC$ i $\measuredangle C = 45°$, izračunati površinu dijela kruga ograničenog stranicom trougla AB i lukom AB.

2) Uglovi na osnovici jednakokrakog trougla ABC iznose po 15°. Odrediti odnos osnovice i kraka tog trougla.

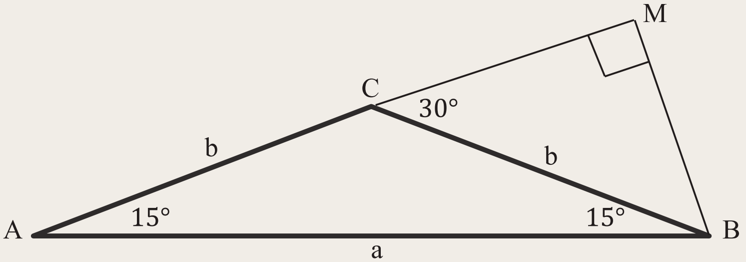
Rješenja:

1. Neka je tačka M centar tog kruga. $\measuredangle AMB = 2\measuredangle ACB = 90°$ (centralni i periferijski ugao nad istom tetivom AB). Površina traženog dijela kruga dobiće se kada od kružnog isječka koji odgovara tetivi AB (čija je površina jednaka četvrtini površine kruga zato što je centralni ugao nad tetivom AB prav) oduzmemo površinu pravouglog trougla AMB čija je površina 50 cm^2 (jer je $AM = BM = r = 10$ cm)

$$P = \frac{1}{4}r^2\pi - P_{\triangle}AMB = 25(\pi - 2)\ cm^2$$



2. Odaberimo tačku M na pravoj AC iza C tako da je $\measuredangle AMB$ prav. Lako se može izračunati da je $\measuredangle MCB = 30°$ (spoljašnji ugao trougla ABC). Tada je $\measuredangle MBC = 60°$. Kako je $CM = b$, to je $MB = \frac{b}{2}$, a $MC = \frac{b\sqrt{3}}{2}$. Primjenom Pitagorine teoreme na trougao ABM je: $a^2 = (\frac{b}{2})^2 + (b + \frac{b\sqrt{3}}{2})^2$, odnosno $a^2 = (2+\sqrt{3})b^2$, odakle slijedi da je $\frac{a}{b} = \sqrt{2+\sqrt{3}}$.



IX razred

1) Naći $a + b$ ako je $a = \sqrt{5 - \sqrt{17 + 2\sqrt{7}}}$ i $b = \sqrt{5 + \sqrt{17 + 2\sqrt{7}}}$.

2) Brojevi od 1 do 10 zapisani su u proizvoljnom poretku i svaki od njih je sabran sa svojim rednim brojem. Dokazati da među dobijenim zbirovima postoje bar dva broja čija je poslednja cifra jednaka.

Rješenja:

1. $(a + b)^2 = (\sqrt{5 - \sqrt{17 + 2\sqrt{7}}} + \sqrt{5 + \sqrt{17 + 2\sqrt{7}}})^2 =$

$5 - \sqrt{17 + 2\sqrt{7}} + 5 + \sqrt{17 + 2\sqrt{7}} + 2\sqrt{5^2 - (\sqrt{17 + 2\sqrt{7}})^2} =$

$10 + 2\sqrt{25 - 17 - 2\sqrt{7}} = 10 + 2\sqrt{8 - 2\sqrt{7}} =$

$10 + 2\sqrt{(\sqrt{7} - 1)^2} = 10 + 2\sqrt{7} - 2 = 8 + 2\sqrt{7} = (\sqrt{7} + 1)^2$

Odavde je $a + b = \sqrt{(\sqrt{7} + 1)^2} = \sqrt{7} + 1$

3. Označimo zapisane brojeve redom $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$. Tada su dati zbirovi jednaki redom $x_1 + 1, x_2 + 2, \ldots, x_{10} + 10$. Ako saberemo date zbirove dobićemo $x_1 + 1 + x_2 + 2 + \ldots + x_{10} + 10 = x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} + 1 + 2 + \ldots + 10 = 55 + 55 = 110$. Pretpostavimo da je moguće da se svi od zbirova $x_1+1, x_2+2, \ldots, x_{10}+10$ završavaju različito, tj jedan nulom, jedan jedinicom itd... Tada bi se njihova suma završavala peticom, jer je $0 + 1 + 2 + \ldots + 9 = 55$, a kako smo dobili da se suma datih zbirova završava nulom a ne peticom dobili smo kontradikciju. Dakle, nije moguće da se svaki od 10 zbirova završava različitom cifrom.

Hidajeta Lukač, JU OŠ „Dušan Korać", Bijelo Polje

OLIMPIJADA ZNANJA 2019.

Zadaci za VII razred

1. Na kružnici su u smjeru kretanja kazaljke na satu ispisani svi prirodni brojevi od 1 do 2019. Precrtajmo najprije broj 1, zatim broj 10, pa 19, pa 28, i tako redom u istom smjeru. Koji će broj prvi biti precrtan dva puta? Koliko je brojeva u tom trenutku ostalo neprecrtano?
2. Tablica 7×7 popunjava se brojevima iz skupa $\{-1, 0, 1\}$, a zatim se izračunaju zbirovi u pojedinim vrstama, kolonama i na obje dijagonale. Dokazati da, kako god popunili tablicu, među tim zbirovima postoje dva jednaka.
3. U trouglu ABC ugao kod tjemena A jednak je $60°$. Simetrala stranice AB siječe pravu AC u tački N, a simetrala stranice AC siječe pravu AB u tački M. Dokazati da je $|CB| = |MN|$.
4. Odrediti sve petocifrene brojeve koji se završavaju sa 17, djeljivi su sa 17 i čiji je zbir cifara jednak 17.

Rješenja zadataka za VII razred

1. Kako je $2019 = 9 \cdot 224 + 3$ to će u prvom obilasku biti precrtani brojevi:

$$1 = 0 \cdot 9 + 1,\ \ 10 = 1 \cdot 9 + 1,\ \ 19 = 2 \cdot 9 + 1, \ldots ,$$
$$2017 = 224 \cdot 9 + 1.$$

U sljedećem obilasku biće precrtani brojevi:

$$7 = 0 \cdot 9 + 7,\ \ 16 = 1 \cdot 9 + 7,\ \ 25 = 2 \cdot 9 + 7, \ldots ,$$
$$2014 = 223 \cdot 9 + 7.$$

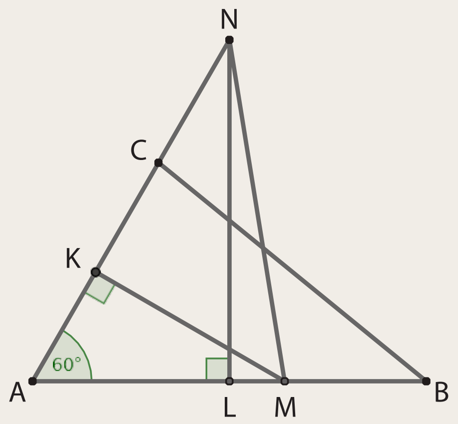
U trećem obilaženju će biti precrtani:

$$4 = 0 \cdot 9 + 4,\ \ 13 = 1 \cdot 9 + 4,\ \ 22 = 2 \cdot 9 + 4, \ldots ,$$
$$2011 = 223 \cdot 9 + 4.$$

U četvrtom obilaženju prvo ćemo precrtati broj 1 i to će biti prvi dva puta precrtan broj. Dakle, do tada je ukupno precrtano $225 + 224 + 224 + 1 = 674$. Prema tome, neprecrtanih brojeva je ostalo $2019 - 673 = 1345$.

2. Mogući zbirovi su brojevi iz skupa $\{-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Izračunatih zbirova po kolonama ima 7, po vrstama 7 i dva na dijagonalama. Dakle, ukupno 16 zbirova uzima vrijednosti iz 15−članog skupa pa postoje bar dva jednaka zbira.

3. Označimo središte stranice AB sa L, a središte stranice AC sa K. Iz pravouglog trougla AKM sa uglovima 30° i 60° zaključujemo da je $|AK| = \frac{1}{2}|AM| = \frac{1}{2}|AC|$. Slično, iz pravouglog trougla ANL zaključujemo da je $|AL| = \frac{1}{2}|AN| = \frac{1}{2}|AB|$. Dakle, $\Delta ABC \cong \Delta AMN$ (SUS stav: $|AC| = |AM|$, $\measuredangle BAC = \measuredangle NAM = 60°$, $|AB| = |AN|$), odakle slijedi $|CB| = |MN|$.



4. Neka su traženi brojevi oblika $abc17$. Kako 17 dijeli $abc17 = 100 \cdot abc + 17$ zaključujemo da 17 dijeli i abc. Zbir cifara je 17, tj. $a+b+c+1+7 = 17$ pa je $a+b+c = 9$. Odavde slijedi da 9 dijeli abc. Brojevi 9 i 17 su uzajamno prosti i dijele broj abc pa i njihov proizvod 153 dijeli broj abc. Dakle $abc = 153 \cdot k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ Direktnom provjerom nalazimo sve moguće trocifrene brojeve koji imaju navedena svojstva: 153, 306 i 612, pa traženi petocifreni brojevi su 15317, 30617 i 61217.

Zadaci za VIII razred

1. Svaka od kateta pravouglog trougla uvećana je za po 1 cm. Da li se njegova hipotenuza mogla uvećati za više od $\sqrt{2}\ cm$?
2. Petocifreni broj x počinje cifrom 4, a završava se cifrom 7, a petocifreni broj y počinje cifrom 9, a završava se cifrom 3. Brojevi x i y imaju zajednički petocifreni djelilac. Dokazati da je broj $2y - x$ djeljiv sa 11.
3. Na stranicama AB, BC, CD i DA četvorougla $ABCD$ izabrane su redom tačke K, L, M i N, takve da je $AK = AN$, $BK = BL$, $CL = CM$ i $DM = DN$. Četvorougao $KLMN$ je pravougaonik. Dokazati da je četvorougao $ABCD$ romb.

4. Na poljima šahovske table raspoređena su zrna pirinča. Broj zrna na svaka dva susjedna polja se razlikuje za 1. Dva polja su susjedna ako imaju zajedničku stranicu. Poznato je da se na jednom od 64 polja nalaze 3, a na nekom od ostalih 63 polja 17 zrna. Pijetao jede zrna sa glavne dijagonale čija su sva polja bijela, a kokoška sa druge. Ko će pojesti više, pijetao ili kokoška? (Glavnim dijagonalama nazivaju se dijagonale koje sadrže po 8 polja ove table.)

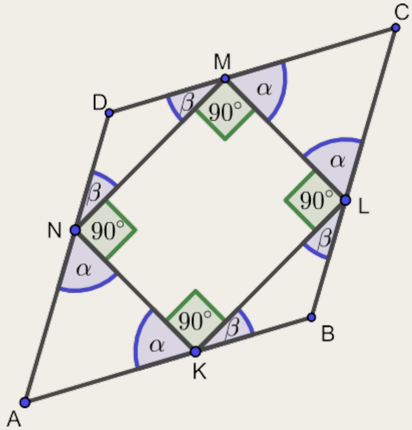
Rješenja zadataka za VIII razred

1. Označimo dužine kateta, prije povećanja, sa x i y i predpostavimo da se po uvećanju ovih dužina, dužina hipotenuze uvećala za više od $\sqrt{2}$ *cm*. Tada važi sljedeći niz nejednakosti:

$$\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2} > \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y+1)^2 > x^2+y^2+2+2\sqrt{2(x^2+y^2)}$$
$$\Leftrightarrow 2(x+y+1) > 2\left(1+\sqrt{2(x^2+y^2)}\right)$$
$$\Leftrightarrow x+y > \sqrt{2(x^2+y^2)}$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+2xy > 2x^2+2y^2$$

$\Leftrightarrow (x-y)^2 < 0$, što nije tačno.

2. Neka je $x = az$, $y = bz$, gdje je z zajednički petocifreni djelilac brojeva x i y, pa a i b moraju biti neparni brojevi, i mora važiti $a < b$, $a \leq 4$, $b \leq 9$. Odavde je $a = 1$ ili $a = 3$. Ako je $a = 1$, to je $z = x$, pa je $y = bx$ i $b \geq 3$. Tada je $y \geq 3x > 120000$, što je nemoguće jer je y petocifreni broj. Dakle, $a = 3$. Pošto je $a = 3$, a poslednja cifra broja x je 7, zaključujemo da poslednja cifra broja z mora biti 9. Kako je poslednja cifra broja y jednaka 3, zaključujemo da je $b = 7$. Dobijamo da je $y = 7z$. Dalje je $2y - x = 14z - 3z = 11z$, pa je broj $2y - x$ djeljiv sa 11.
3. Pošto je $AK = AN$, $BK = BL$, $CL = CM$ i $DM = DN$, zaključujemo da su trouglovi ΔAKN, ΔBKL, ΔCLM i ΔDMN jednakokraki. Uvedimo oznake $\angle AKN = \angle ANK = \alpha$ i $\angle BKL = \angle BLK = \beta$. Pošto je $\angle NKL = 90°$, zaključujemo da je $\alpha + \beta = 90°$. Dalje, pošto je i ugao $\angle KLM$ prav, to je $\beta + \angle MLC = 90°$, tj. $\angle MLC = \angle LMC = \alpha$. Analogno zaključujemo da je $\angle DMN = \angle DNM = \beta$. Dakle, pošto je četvorougao $KLMN$ pravougaonik, to je $KN = LM$ i $KL = MN$. Zaključujemo da su trouglovi ΔAKN i ΔBKL podudarni trouglovima ΔCLM i ΔDMN, respektivno. Iz toga slijedi da je $AB = AK + KB = CM + MD = CD$ i $AD = AN + ND = CL + LB = BC$, pa je četvorougao $ABCD$ romb.



4. Kako se broj zrna na svaka dva susjedna polja razlikuje za 1, razlika u broju zrna po 3 i 17 zrna su u dijagonalno suprotnim ćoškovima table. Određenosti radi, pretpostavimo da su 3 zrna u donjem lijevom, a 17 zrna u gornjem desnom ćošku. Tada se brojevi u prvoj koloni povećavaju od poslednje vrste naviše ka prvoj: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, a brojevi prve vrste su 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, redom od prve ka osmoj koloni. Dalje, kada god treba popuniti prazno polje čiji su „dijagonalni" susjedi već popunjeni brojevima i − 1 i i + 1, kao na slici, nemamo izbora, jer se na njemu mora naći tačno *i* zrna:

i	$i+1$
$i-1$	

$\Rightarrow$

i	$i+1$
$i-1$	I

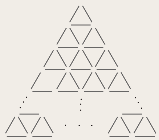
Odavde zaključujemo da je raspored zrna po tabli sljedeći:

10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10

Dakle, ukupan broj zrna na jednoj glavnoj dijagonali je $8 \cdot 10 = 80$, a na drugoj $3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 = 80$, pa će pijetao i kokoška pojesti isti broj zrna pirinča.

Zadaci za IX razred

1. Viktor je od šibica napravio veliki jednakostranični trougao čije se stranice sastoje od po k šibica. Zatim ga je, postavljajući šibice unutar njega, podijelio na male jednakostranične trouglove čije su stranice šibice, kao na slici:



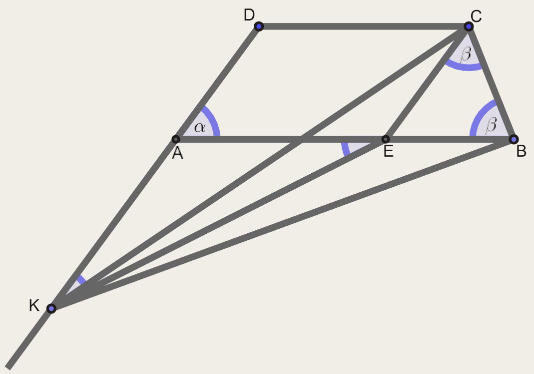
   Aleksa je, na isti način, napravio veliki jednakostranični trougao čija stranica ima 3 šibice više od Viktorovog prvog, velikog trougla, a zatim ga podijelio na male jednakostranične trouglove čije su strane šibice. Aleksa kaže da mu je bilo potrebno 111 šibica više nego Viktoru, ali Viktor se sa tim ne slaže. Ko je u pravu, Aleksa ili Viktor?
2. U trapezu $ABCD$ važi $\measuredangle BCD = \measuredangle DAB + \measuredangle ABC$. Na produženju duži DA kroz tjeme A izabrana je tačka K takva da je $AK = CD$. Dokazati da je $BK = CK$.
3. Da li postoje prirodni brojevi a i b takvi da se vrijednost izraza $ab(a + b)$ zapisuje datumom: 11. maj 2019. godine, to jeste takvi da važi: $ab(a + b)$ = 11052019.
4. Gledaoci ocjenjuju film ocjenama od 0 do 10. U svakom trenutku rejting filma se dobija kao srednja vrijednost svih ocjena pristiglih do tog trenutka. U momentu T je rejting filma bio cio broj, a nakon toga se sa svakim novim pristiglim glasom smanjivao za 1. Koliko je najviše glasova moglo stići nakon momenta T?

Rješenja zadataka za IX razred

1. Pogledajmo prvo koliko se šibica troši pri „dogradnji" jednog reda malih jednakostranočnih trouglova, posmatrano od vrha velikog trougla naniže. U prvom redu, na samom vrhu, je jedan trougao i tačno 3 šibice. U sljedećem, drugom redu, su 3 jednakostranična trougla i za dogradnju ovog reda potrošeno je $2 \cdot 3 = 6$ šibica. U trećem redu je $3 \cdot 3 = 9$ šibica, ..., u k-tom redu je $3k$ šibica. Aleksina figura nastaje iz Viktorove dodavanjem tri nova reda, za šta je potrebno još $3(k+1)+3(k+2)+3(k+3) = 9(k+2)$ šibica. Kako broj 111 nije djeljiv sa 9, u pravu je Viktor.
2. Neka je tačka E presjek stranice AB i prave koja sadrži tačku C i paralelna je stranici DA. Četvorougao AECD je paralelogram, a kako je

$\measuredangle BCD = \measuredangle DAB + \measuredangle ABC$, vidimo da je $\measuredangle BCE = \measuredangle ABC$, odnosno da je trougao ΔEBC jednakokraki, pa je EB = EC. Dalje, kako je AK = CD = AE, to je trougao ΔAKE jednakokraki, pa je $\measuredangle AKE = \measuredangle KEA$. Dodatno, $\measuredangle EAK = \measuredangle CDA$ (F-uglovi). Pošto je $\measuredangle KEC = \measuredangle KEA + \measuredangle AEC = \measuredangle KEA + \measuredangle CDA$ i $\measuredangle BEK = \measuredangle EAK + \measuredangle AKE = \measuredangle KEA + \measuredangle CDA$ (kao spoljašnji ugao trougla ΔAKE), zaključujemo da je $\measuredangle KEC = \measuredangle BEK$. Posmatrajmo trouglove ΔKEC i ΔKEB. Kako je $EB = EC$, $\measuredangle KEC = \measuredangle BEK$ i kako je EK zajednička stranica za ova dva trougla, po stavu SUS zaključujemo da su ovi trouglovi podudarni, pa je $BK = CK$.

3. Pretpostavimo da postoje ovakvi brojevi a i b. Broj 11052019 nije djeljiv sa 3, pa ni jedan od brojeva a, b ili $a + b$ nije djeljiv sa 3. Tada su a i b prirodni brojevi koji oba pri dije-ljenju sa 3 daju isti ostatak: 1 ili 2. Neka je $a = 3k + 1$ i $b = 3s + 1$, za neke $k, s \in N$. Tada je $ab(a+b) = (9ks+3k+3s+1)[3(k+s)+2] = 3(k+s)(9ks+3k+3s+1)+6(3ks+k+s)+2$, pa $ab(a+b)$ pri dijeljenju sa 3 daje ostatak 2, dok 11052019 pri dijeljenju sa 3 daje ostatak 1. Neka je sada $a = 3k + 2$ i $b = 3s + 2$, za neke $k, s \in N$. Tada je $ab(a + b) = (9ks + 6k + 6s + 4)[3(k + s) + 4] = 45ks(k + s) + 36ks + 36(k + s) + 16$, pa $ab(a+b)$ pri dijeljenju sa 9 daje ostatak 7, dok 11052019 pri dijeljenju sa 9 daje ostatak 1.



4. Neka je do momenta T glasalo n gledalaca, i neka je x rejting filma u tom trenutku. Suma glasova gledalaca u trenutku T je nx. Nakon što pristigne sledeći glas, rejting se smanjuje za 1, pa je tada suma svih glasova $nx + y = (n+1)(x-1)$. Odavde je $y = x - n - 1$. Kako je najveća vrijednost rejtinga x jednaka 10, a najmanja vrijednost n jednaka 1, to je najveća vrijednost koju y može uzeti 8. U svakom sledećem koraku se n poveća za 1, a x smanji za 1, pa se y smanjuje za 2. Dakle, u sledećem koraku y uzima vrijednost 6, pa 4, pa 2, pa 0. Kako ocjena filma ne može biti negativna, to je broj koraka najviše 5. Dakle, nakon momenta T je najviše moglo stići 5 glasova.

Priredila: Irena Pavićević, JU OŠ „Štampar Makarije", Podgorica

Produžiti niz

Nizovi brojeva se veoma često pojavljuju u matematici. Mogu biti ograničeni i neograničeni. Neke možemo zadati listom njegovih elemenata, neke direktnom formulom, a za neke nizove čak i ne postoji formula po kojoj su zadati. U matematici se posebna pažnja poklanja aritmetičkim i geometrijskim nizovima. Niz koji je izašao iz okvira matematičkih teorija i vezan je za najsavršeniju proporciju rastućih oblika u prirodi - zlatni presjek, je Fibonačijev niz.

Prvih nekoliko članova Fibonačijevog niza su: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21...
Pokušaj da otkriješ pravilo po kojem se dobijaju članovi Fibonačijevog niza.
U narednim zadacima odredi sledeći član niza:

1) 1, 4, 7, 10, 13, 16, ___, ...
2) 3, 4, 6, 9, 13, 18, 24, ___, ...
3) 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ___, ...
4) 2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, ___, ...
5) 1, 8, 27, 64, 125, ___, ...
6) 78, 1516, 1314, 910, 1011, ____, ...
7) 1
   11
   21
   1211
   111221
   312211
   ____

Rješenja:

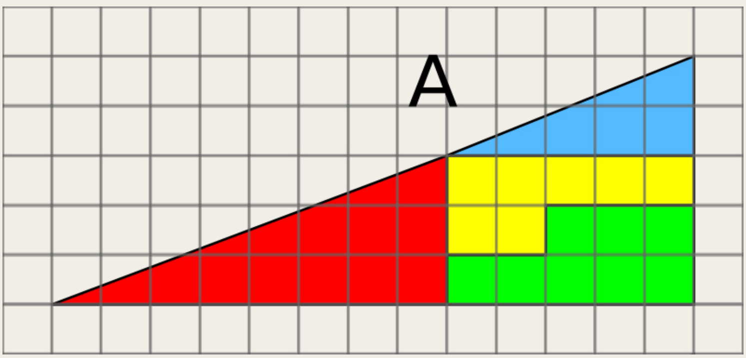
Svaki sledeći član Fibonačijevog niza, počev od trećeg, dobija se kao zbir prethodna dva člana.

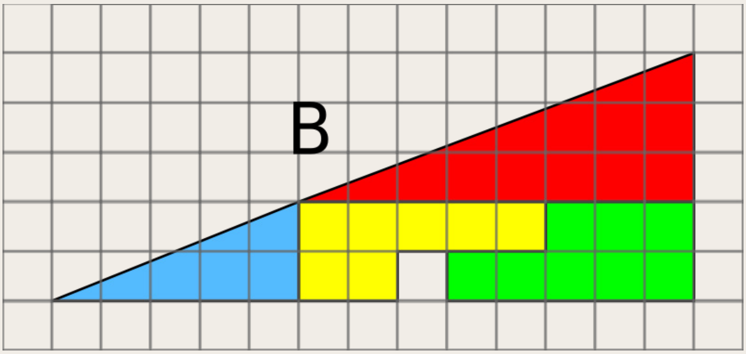
1) 19 – svaki sledeći član niza dobija tako što se prethodni uveća za 3.
2) 31 – razlika uzastopnih članova niza se povećava za 1.
3) 64 – članovi niza su kvadrati prirodnih brojeva.
4) 65 – razlika uzastopnih članova je niz neparnih brojeva.
5) 216 – članovi niza su kubovi prirodnih brojeva.
6) 34 – prvi dio broja se dobija sabiranjem svih cifara prethodnog člana, a drugi je njegov sljedbenik.
7) 13112221 – ili riječima: 1 trojka, 1 jedinica, 2 dvojke i 2 jedinice jer je prethodni član niza bio upravo 312211.

Slagalica: kvadrat koji nedostaje

Da matematika nije dosadna, nezanimljiva i namijenjena samo uskom krugu „genijalaca“, već da može biti odlična zabava i misaona razbibriga šireg auditorijuma svjedoče i brojni naslovi na internet portalima: „Matematički zadatak posvađao cijeli internet: Znate li vi tačan rezultat?“, „Ova MATEMATIČKA MOZGALICA zaludjela je internet, možete li da je riješite?“, „NOVA MATEMATIČKA MOZGALICA ZBUNJUJE I GENIJALCE - Gotovo svi odustaju i traže rješenje, možete li vi pogoditi u čemu je caka?“...

Jedna od takvih mozgalica koja već decenijama zadaje „muke“ svakom putniku namjerniku sa kojim slučajno (ili namjerno) ukrsti put je matematička slagalica poznata kao **„Kvadrat koji nedostaje“.** Osmislio je jedan njujorški mađioničar-amater 1953. godine. Pol Kari (Paul Curry) možda ne bi bio amater da se umjesto magije u vidu izvlačenja zeca iz čarobnog šešira, trikova sa kartama i raznoraznim iluzijama, opredijelio za izučavanje magičnih matematičkih zakonitosti brojeva i geometrijskih figura. U svakom slučaju, pored velikog uspjeha u svijetu magije, ovim zadatkom ostavio je traga i u matematici. O čemu se zapravo radi:

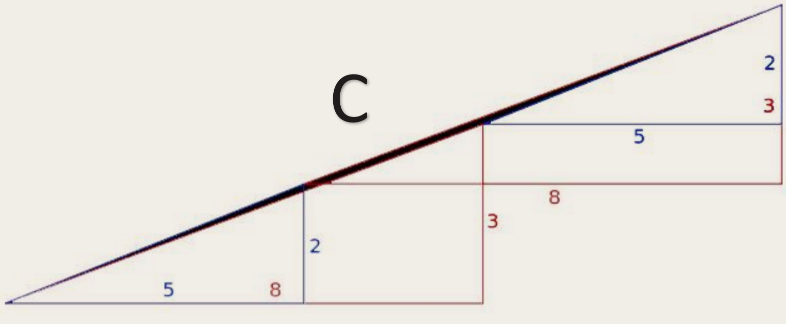




Na slici A je prikazan jedan „trougao“, koji je podijeljen na četiri dijela. Premještanjem tih djelova i njihovom preraspodjelom dobija se „isti trougao“ (slika B) iz kojeg je, kao nakon pucketanja prstima vještog mađioničara, nestao jedan kvadratić. Zastanite na trenutak, prekinite sa čitanjem teksta i razmislite kakva je to magija ovdje umiješala prste. Da li je ovaj „trougao“ misterija, poput Bermudskog trougla? Postoji li neko racionalno objašnjenje? (Odgovor slijedi u nastavku teksta, a shvatićete i da to što je riječ trougao pod navodnicima, nije bila štamparska greška.)

Na prvi pogled čini se kao da je matematika zakazala. Nešto nije u redu „bezgrešnom“ naukom. Pala je na ispitu, poslije brojnih desetki u svom „indeksu“. Dva naizgled podudarna trougla, sastavljena su od istih djelova, a ipak u jednom od njih nedostaje kvadratić. Gdje li je nestao?

U pitanju je samo optička iluzija i nesavršenost našeg oka koje (na slikama A i B) prosto želi da vidi pravougli trougao, dok je zapravo riječ o četvrouglovima i to: na slici A konkavnom, a na slici B konveksnom (uključujući nedostajući kvadrat). Problem je dakle u „hipotenuzi“, koja nije prava linija, već izlomljena. Njen nagib se mijenja prelaskom sa crvenog na plavi trougao, koji nisu slični (katete im nisu proporcionalne: $8:3 \neq 5:2$). Ovo se može provjeriti i nezaobilaznom Pitagorinom teoremom. Izračunati hipotenuzu velikog trougla čije su katete dužine 13 i 5, a zatim ih uporediti sa zbirom hipotenuza plavog (sa katetama 5 i 2) i crvenog (sa katetama 8 i 3) trougla. Vidjećete da nešto ne štima.



Na slici C se jasno vidi razlika u površini koja nastaje premještanjem plavog i crvenog trougla, što je predstavljeno osjenčenim dijelom oivičenim „udubljenom“ i „ispupčenom“ hipotenuzom „trouglova“ prikazanih na slikama A i B. I upravo taj osjenčeni dio površi se može pretočiti u nedostajući kvadratić.

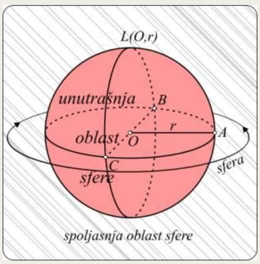
Misterija je riješena. Još jedan trijumf i još jedna „desetka“ savršene nauke u nesavršenom svijetu koji nas okružuje.

Nikola Milačić, JU OŠ „Sutjeska“, Podgorica

PRIPREMA ZA ČAS

Škola	JU OŠ „Vladimir Nazor“, Podgorica
Predmet	Matematika
Razred	IX
Pojmovi	Presjeci i djelovi lopte
Obrazovno-vaspitni ishod učenja:	Nakon učenja učenici će moći da objasne presjeke lopte i ravni, kao i da definišu dobijene presjeke; moći će naučeno da primijene u različitim situacijama.
Oblici rada	– rad u paru – frontalni rad
Nastavne metode	– monološko-dijaloška – demonstrativna
Nastavna sredstva	– hamer papir sa slikama lopte – lopta (fudbalska ili neka druga)
Nastavnice	**Valentina Mijović, prof.**

Uvodni dio časa (5 do 10 minuta)



1. korak/ aktivnost

Obnavljenje o sferi, lopti i njihovim elementima. Učenici daju odgovore na sledeća pitanja:

– Šta je sfera? Šta je poluprečnik, a šta prečnik sfere?
– Kako su podijeljenje sve tačke prostora nekom sferom?
– Šta je lopta? Čime je određena svaka lopta?

Glavni dio časa (30 do 35 minuta)

2. korak/ aktivnost:

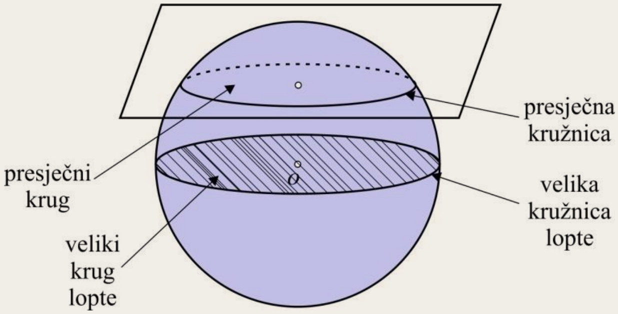
Na modelu lopte učenici treba da uoče presjek lopte i ravni - mali i veliki krug lopte, loptin odsječak, poluloptu i loptin sloj.

Nastavnik sve ove pojmove objašnjava i ilustruje crtežom.

* Presjek ravni i lopte:

Zadata je lopta $L(O,r)$.

Nastavnik na istoj slici izdvaja presjeke lopte i ravni, kao i djelove lopte uz definisanje bitnih pojmova:



– Presjek ravni i lopte uvijek je krug.

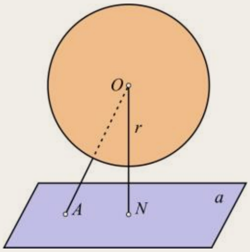
– Presječna ravan koja sadrži centar lopte dijeli loptu na dvije polulopte .

– Loptin odsječak - dio lopte koji odsijeca neka ravan.

– Loptin sloj - dio lopte između dvije paralelne ravni.

* Odnos lopte i ravni

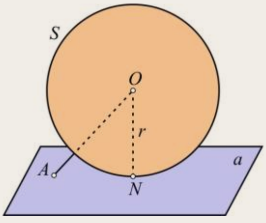
Neka je pored lopte $L(O,r)$ zadata ravan α. Nastavnik definiše duž ON, $N \in \alpha$, normalnu na datu ravan, i uz aktivno uključivanje učenika razmatra sva tri slučaja:



a)

ON je najkraće rastojanje centra sfere od ravni.

Ako je $ON > r$ tada sfera i ravan α nemaju zajedničkih tačaka.

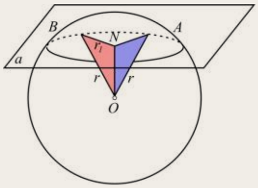


b)

Sfera i ravan α imaju tačno jednu zajedničku tačku. Rastojanje centra sfere od ravni α jednako je poluprečniku sfere, tj. $ON = r$.

Ravan α je tangentna ravan - sa sferom ima tačno jednu zajedničku tačku (tačka N - dodirna tačka).

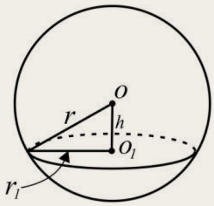
(Postaviti model lopte na ravan stola i navesti učenike na logičko zaključivanje kada oni uočavaju koliko zajedničkih tačaka imaju lopta i ravan i što je ravan stola u odnosu na loptu).



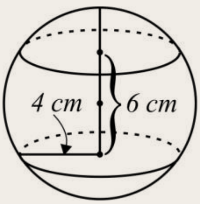
c)

Ako je rastojanje centra sfere od ravni α manje od poluprečnika sfere, tj.
$ON < r$, tada je presjek sfere i ravni α kružnica – presječna kružnica.

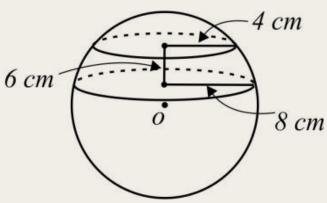
Nastavnik učenicima zadaje tri zadatka, koje oni rade u paru.



Zadatak 1: Neka je r poluprečnik lopte, r_1 poluprečnik presjeka lopte i date ravni. Izračunati poluprečnik lopte ako je $r_1 = 16$ mm i $h = 12$ mm.



Zadatak 2: Data je lopta i dva paralelna podudarna presjeka lopte i ravni. Ako je rastojanje između tih presjeka 6 cm, a poluprečnik presjeka 4 cm, koliki je poluprečnik lopte?



Zadatak 3: Lopta je presječena dvijema paralelnim ravnima. Ako su poluprečnici presjeka 4 cm i 8 cm, a rastojanje između tih ravni 6 cm, koliki je poluprečnik lopte?

Završni dio časa (5min)

* Pitanja za ponavljanje:
– Šta je presjek lopte i ravni? Kada se dobija veliki loptin krug?
– Koje smo djelove lopte upoznali?
– Kada kažemo da je neka ravan tangentna ravan lopte?

<u>* Domaći zadatak:</u> četiri zadatka iz Zbirke zadataka po izboru nastavnika.

Valentina Mijović, JU OŠ „Vladimir Nazor”, Podgorica

Dr Miodrag Perović

TRI KLASIČNA GEOMETRIJSKA PROBLEMA

Pitanje tačnog izračunavanja površine kruga staro je koliko i mate-matika. Zadatak ne rješava formula $P = r^2\pi$, $\pi = 3{,}14$ koju su znali Vavilonci 2000 godina prije nove ere, niti njen dokaz koji će dati Eudoks 1600 godina kasnije (370-tih p.n.e.). Kad su Vavilonci uzimali $\pi = 3$ ili $\pi = 3\frac{1}{8}$ znali su da su to samo približne vrijednosti. Stari Grci su (kao i Vavilonci) shvatali da se proces nalaženja sve tačnije aproksimacije broja π racionalnim brojevima, upisivanjem u krug pravilnih mnogouglova sa sve većim brojem stranica, produžava *ad infinitum* (tj. nikad se ne završava). Zbog ove računske „neuhvatljivosti" broja π, oni su problem izračunavanja površine kruga formulisali i u geometrijskim terminima: *Odrediti kvadrat jednak datom krugu* (kvadrat čija je površina jednaka površini datog kruga).

Zahtjev da se *odredi* kvadrat koji ima istu površinu kao i dati krug u početku nije bio ničim ograničen. Kad nijesu mogli da problem riješe geometrijski, ljudi su pokušavali da naprave razne mehaničke pribore pomoću kojih bi obavili neku od pomenutih konstrukcija. Atinski komediograf Aristofan (ca 448--385. p.n.e.) u svojoj komediji *Ptice* iz 414. p.n.e. pominje problem kvadrature kruga u kontekstu iz kojeg se vidi da je krajem V vijeka taj problem opšte poznata stvar (kulturni fenomen). U njegovoj komediji *Oblaci* (423. p.n.e) pominju se mehanički pribori za geometrijske konstrukcije.

Iz mnoštva mogućih pribora tokom vremena izdvojeni su šestar i lenjir i termin odrediti u geometriji je dobio značenje – *konstruisati*, što znači koristiti samo šestar i lenjir. U ovoj formulaciji zadatak je poznat kao *problem kvadrature kruga*.

Drugi problem koji se standardizovao tokom petog stoljeća p.n.e. bio je problem *trisekcije ugla*: kako proizvoljni ugao izdijeliti na tri, ili više, jednakih uglova, koristeći samo šestar i lenjir? Rješenje je nađeno za neke specijalne slučajeve (kao što je ugao od 180°), ali niko nije nalazio neku opštu konstrukciju koja bi bila primjenljiva na svaki ugao.

Najpoznatiji antički problem bio je zadatak da se nađe kocka dvostruko veće zapremine od date kocke, nazvan *problem dupliranja kuba*. Teon Aleksandrijski (kasni IV vijek n.e.) i Eutokije (rođ. oko 480. n.e.) prenose dvije donekle različite legende o njegovom porijeklu, obojica pozivajući se na Eratostena (ca 276–ca 195 p.n.e.), rukovodioca Aleksandrijske biblioteke. Teon piše:

> U svom radu pod naslovom *Platonicus* Eratosten kaže, kada je bog objavio Delfijcima preko proročanstva da moraju da konstruišu dvostruko veći oltar od postojećeg da bi se oslobodili kuge, njihovi majstori su došli u veliku zabunu pokušavajući da nađu kako bi se moglo napraviti tijelo dvostruko veće zapremine od drugog tijela.

Na osnovu ove legende problem dupliranja kuba često se naziva *delfski (delfijski) problem*. Eutokije citira Eratostenovo *Pismo Ptolomeju*:

> Eratosten kralju Ptolomeju, pozdrav.
>
> Priča kaže da je jedan od drevnih pjesnika tragičara predočio da je Minos izgradio grob za (sina) Glaukusa, ali kada je našao da grob ima sto stopa sa svake strane Minos reče: „Ovaj grob je premali da bi bio kraljevsko mjesto za počinak. Neka bude dvaput veći. Ne kvareći formu samo dupliraj svaku stranicu groba".
>
> Ovo je, jasno, bila greška. Jer ako se stranice dupliraju, površina se umnoži četvorostruko, a zapremina osmostruko.
>
> Ovaj problem je postao poznat kao dupliranje kuba, jer, za dati kub, oni su tražili duplo veći kub.

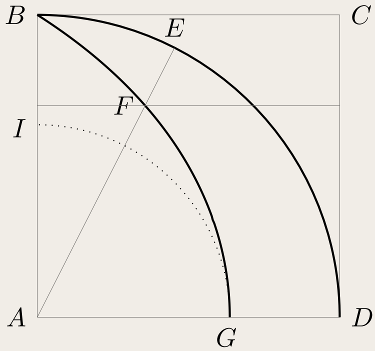
1. Trisektrisa

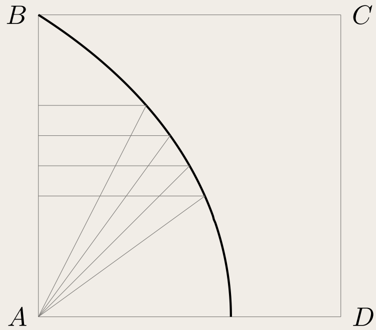
Prvi mehanički pribor pomoću kojeg bi se vršila trisekcija ugla opisao je Hipija (460–?) sa Elisa. Ova prva u istoriji matematike transcendentna kriva nazvana je *trisektrisa*. (Kriva u ravni naziva se *algebarskom* ako se u koordinatnom sistemu *Oxy* moze opisati *algebarskom jednačinom*, tj. jednačinom oblika $p(x,y) = 0$, gdje je p polinom od dvije promjenljive; kriva se naziva *transcendentnom* ako nije algebarska. Naziv dolazi od *vis algebrae transcedeit*, sto znači moć algebre prevazilazi.) U antičko vrijeme nije se znalo za pojam transcendentne krive, pa se o Hipijinom izumu govorilo kao o prvoj krivoj koja nije odsječak prave ili luk konike, što je slabiji uslov od transcendentnosti.

Hipija je imao ideju da diobu ugla na jednake djelove svede na diobu duži na jednake djelove. Ako kroz krajeve jednakih odsječaka na vertikalnom radijusu kruga povučemo paralele, one će presjeći kružnicu u tačkama koje određuju nejednake uglove. Cilj je da se nađe kriva koju će ove paralele presjeći u tačkama koje odreduju jednake uglove. Pretpostavimo da je takva kriva zadata. Tada, rotirajući (na donjoj slici) radijus AB oko tačke A ravnomjerno do položaja AD, visina tačke F u kojoj radijus siječe krivu, odnosno visina horizontale kroz F, proporcionalno će se smanjivati. Drugim riječima, ako se stranica BC kreće ravnomjerno (konstantnom brzinom) prema dolje, a radijus AB rotira ravnomjerno (konstantnom ugaonom brzinom) prema položaju AD, pri čemu su ta dva kretanja usaglašena tako da počinju u istom i završavaju se u istom trenutku, onda traženu krivu čine presječne tačke horizontala i radijusa koji odgovoraju istom trenutku. Ova kriva nazvana je *trisektrisom*.

Pap, u III vijeku naše ere, u IV knjizi njegove *Kolekcije* navodi manu ove konstrukcije.

> Sporus (kraj trećeg vijeka n.e.) je nezadovoljan s ovim iz sljedećeg razloga. Prije svega, ono zbog čega je kriva konstruisana, sadržano je u hipotezi. Jer kako je moguće da dvije tačke koje počinju da se kreću istovremeno iz *B*, jedna prema *C* po pravoj liniji, a druga po kružnici prema *D*, i stižu u *D* za isto vrijeme, osim ako je unaprijed poznat odnos duži *AB* i luka *BED*? Jer neophodno je da brzine tačaka koje se kreću budu u tom odnosu. I kako se onda može, koristeći neprilagođenu brzinu, učiniti da se kretanja završavaju zajedno, osim ako bi se ovo jednom slučajno dogodilo.





Kad Sporus govori da je cilj sadržan u hipotezi, on ima u vidu da ima smisla govoriti o jednakosti duži *AB* i luka *BED* jedino ako smo riješili problem nalaženja duži koja je jednaka luku. No problem rektifikacije luka kružnice (rektifikacija = ispravljanje), ekvivalentan je problemu kvadrature isječka kruga. Jer, kružni isječak jednak je trouglu čija je osnovica duž jednaka luku, a visina njegov poluprečnik; pa se oba problema – kvadratura kruga i rektifikacija kružnice - svode na konstrukciju duži čija je dužina π. Stoga se pomoću trisektrise može ižvršiti i kvadratura kruga. To je stoljeće poslije Hipije dokazao Dinostrat(us) (ca 390-ca 320), pa od tada trisektrisa nosi i naziv *kvadratrisa*.

Ako pretpostavimo da je trisektrisa na neki način zadata, dioba ugla na tri jednaka dijela je trivijalna budući da horizontale kroz krajeve jednakih segmenata na radijusu *AB* presijecaju trisektrisu u tačkama koje određuju krake jednakih uglova.

Međutim, pitanje kako trisektrisu opisati u geometrijskim terminima, a ne pomoću zamišljenog kretanja, ostalo je otvoreno sve dok infinitezimalni račun nije omogućio rektifikaciju luka glatke krive.

2. Redukcije

Grčki matematičari su mnoge geometrijske probleme, među njima i problem trisekcije ugla i dupliranja kuba, prevodili u ekvivalentne probleme koje su smatrali prostijim i to nazivali *redukcijom* polaznog problema. Iako nijesu imali razvijen algebarsko – analitički aparat pomoću kojeg mi izučavamo konusne presjeke, smatrali su da je svođenje nekog problema na problem nalaženja presjeka nekoliko konika, redukcija tog problema. Hipokrat je primijetio da za veličinu x određenu dvojnom proporcijom $2a : y = y : x = x : a$ važi $xy = 2a^2$ i $ay = x^2$, time i $x^3 = 2a^3$, što znači da je x stranica dupliranog kuba. Kad je kasnije Menekmo (390-320) otkrio konusne presjeke, ovo je značilo da se problem dupliranja kuba svodi i na zadatak: *naći presječnu tačku hiperbole* $xy = 2a^2$ i parabole $x^2 = ay$.

Ne treba sumnjati da su matematičari pokušavali da izvrše i redukciju problema kvadrature kruga na problem iz teorije konusnih presjeka, ali su ti pokušaji bili neuspješni iz razloga koji su postali poznati 2300 godina kasnije (vidi niže).

3. Nerješivost tri klasična problema

Pošto matematičari stoljećima nijesu uspijevali da riješe tri klasična problema, počeli su da sumnjaju u njihovu rješivost. Međutim, sve do druge polovine devetnaestog stoljeća matematika nije raspolagala aparatom koji bi omogućio da se to dokaže. Niti su do tog vremena naslućivali da odgovor treba traziti u algebri i analizi.

Jasno je da se problem dupliranja kuba svodi na algebarsku jednačinu

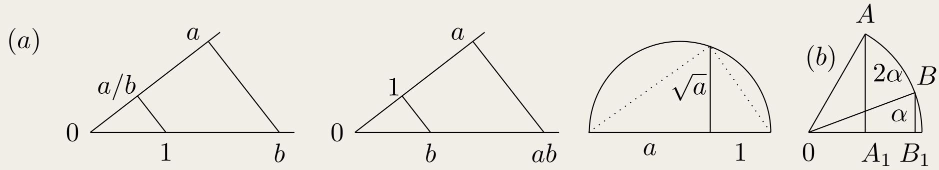
$$x^3 - 2 = 0 \tag{1}$$

S razvojem trigonometrije u sedamnaestom vijeku, nađeno je da (prema donjoj slici (b)) za pravougle trouglove OAA_1 i OBB_1 s tjemenom O u centru kruga u uglovima u tjemenu O jednakim 3α i α, za nalegle katete $OB_1 = x$ ugla α i $OA_1 = a$ ugla 3α važi

$$a = 4x^3 - 3x. \tag{2}$$

(Za dokaz je dovoljno poznavanje svojstava pravouglog trougla, ali dokaz postaje prost tek kad se koristi trigonometrija, koju ćete učiti kroz nekoliko godina.)

Realan broj $a \geq 0$ nazivamo *konstruktibilnim* ako u euklidskoj ravni E postoji duz čija je dužina jednaka a, koja se konstrukcijama lenjirom i šestarom može dobiti od neke duži čija je dužina uzeta za jedinicu 1. Ako su a i b konstruktibilni brojevi, konstruktibilni su i zbir $a + b$ i razlika $a - b$ (za $a \geq b$), a takođe i proizvod ab, količnik a/b ($b \neq 0$) i $\sqrt{a}$ (hipotenuzina visina), i ovi se konstruišu pomoću Talesove teoreme na način ukazan na donjoj slici. Ostali konstruktibilni brojevi dobijaju se od ovih, algebarski.



Tokom razvoja tzv. algebarske teorije brojeva, u drugoj polovini devetnaestog vijeka dokazana je sljedeća teorema.

Teorema 1. Ako algebarska jednačina trećeg stepena

(3) $$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

s cjelobrojnim koeficijentima a, b, c, nema racionalnih rješenja, tada nijedan od njenih korijena (rješenja) nije konstruktibilni broj.

Primijenimo ovu teoremu na jednačine (1) i (2). Broj $x = \sqrt[3]{2}$ je jedino rješenje jednačine (2) jer ako je $x_1^3 = x_2^3 = 2$, onda je $x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 - x_2)[(x_1 + \frac{1}{2}x_2)^2 + \frac{3}{4}x_2] = 0$, pa slijedi da je $x_1 = x_2$. Provjerimo da to rješenje nije racionalni broj. Ako bi postojali relativno prosti cijeli brojevi m i n takvi da je $\sqrt[3]{2} = \frac{m}{n}$, onda bi bilo $m^3 = 2n^3$. Odatle slijedi da postoji cijeli broj p takav da je $m = 2p$. Slijedi da je $n^3 = 4p^3$, pa bi i n bio paran, suprotno pretpostavci da smo u razlomku $\frac{m}{n}$ izvrsili sva kraćenja. To znači da $\sqrt[3]{2}$ nije racionalni broj, pa jednačina (1) nema konstruktibilnih rješenja. Kako je $\sqrt[3]{2}$ njeno jedino rješenje, to $\sqrt[3]{2}$ nije konstruktibilni broj. Dakle, šestarom i lenjirom ne može se naći stranica kocke koja ima dva puta veću zapreminu od zadate.

Primijenimo teoremu i na jednačinu (2) za slučaj $a = 20°$ ($3a = 60°$). Tada je $OA_1 = \frac{1}{2}$, pa jednačina (2) dobija oblik

(4) $$8x^3 - 6x = 1.$$

Dokazaćemo da pretpostavka da ona ima racionalno rješenje dovodi do kontradikcije. Zaista, ako je $x = \frac{p}{q}$ (p, q cijeli i relativno prosti) korijen jednačine (3) slijedi $8p^3 - 6pq^2 = q^3$. Odatle dobijamo $q = 2n$, a potom $p^3 = 3pn^2 + n^3$. Zaključak: Ako je n neparno i p neparno, onda je p parno; ako je n neparno i p parno, onda je p neparno. Dakle, n mora biti parno. No to bi značilo da je p parno, te da p i q nijesu relativno prosti. Dobijena je kontradikcija, pa jednačina (4) nema racionalnih rješenja, i trisekcije ugla 3α šestarom i lenjirom nije moguća za svaki ugao 3α.

Nerješivost problema kvadrature kruga počiva na sljedećoj teoremi.

Teorema 2. *Svaki konstruktibilni broj je algebarski.*

Primijenimo ovu teoremu na problem kvadrature kruga. Konstrukcija duži a koja zadovoljava uslov $a^2 = \pi r^2$ svodi se na konstrukciju duži $\sqrt{\pi}\, r$, a ova na konstrukciju duži $\sqrt{\pi}$. (Konstrukcija proizvoda dvije duži data je na slici na prethodnoj strani.) Zadatak da se konstruiše $\sqrt{\pi}$ ekvivalentan je sa zadatkom da se konstruiše π (vidi sliku (a) na prethodnoj strani). Njemački matematičar Ferdinand von Lindemann (1852−1939) je 1882. godine dokazao (korišćenjem matematičke analize) da broj π nije algebarski. Iz teoreme 2 slijedi da π nije konstruktibilni broj, što znači da problem kvadrature kruga nije rješiv pomoću lenjira i šestara.

Štampanje ovog broja pomogli su:

DOMEN d.o.o.
PODGORICA

BEMAX d.o.o.
PODGORICA

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO
CRNE GORE

MINISTARSTVO PROSVJETE
CRNE GORE

HVALA NAŠIM PRIJATELJIMA!

Uredništvo poziva nastavnike, učenike i sve čitaoce da nam šalju priloge za list: članke, odabrane zadatke, zanimljivosti, priloge za zabavnu matematiku itd.

Dio tiraža ovog broja „Dijagonale" će biti besplatno podijeljen svim bibliotekama osnovnih škola u Crnoj Gori.
Ovaj broj se može kupiti u „**Gradskoj knjižari**" i „**Narodnoj knjizi**".

Sve informacije o pretplati i porudžbini ovog i narednih brojeva možete naći na sajtu Udruženja. Narudžbe slati putem mejla.

Broj žiro računa UNMCG je **550-18240-71** kod Podgoričke banke.

Adresa redakcije je: Ul. Gojka Berkuljana br. 20, Podgorica.

Mejl: udruznastmatem@gmail.com

www.unmcgwordpress.com

CIP - Каталогизација у публикацији
Национална библиотека Црне Горе, Цетиње

ISSN 2536-5851 = Dijagonala
COBISS.CG-ID 36769808

ISSN 2536–5851

9 772536 585009 >