Udruženje nastavnika matematike Crne Gore

# Dijagonala

Matematički list za učenike osnovnih škola Cijena 1,50 €


BROJ 7 - GODINA 2020.

# Udruženje nastavnika matematike Crne Gore

Matematički list za učenike osnovnih škola – „**Dijagonala**", **broj 7**

Godina 2020. Cijena: 1,50 €

*Glavni urednik:* *mr Radomir Božović*

*Odgovorni urednik:* *Danijela Jovanović*

*Redakcija:* *Prof. dr Žarko Pavićević, Prof. dr Radoje Šćepanović, Miodrag Lalić, Prof. dr Milenko Mosurović, Snežana Irić, Aleksandra Vuković, Vanja Đurđić Kuzmanović, Irena Pavićević, Nevena Ljujić*

*Lektura:* *Milja Božović, prof.*

*Korektura:* *Danijela Jovanović, prof.*

*Priprema za štampu:* *Branko Gazdić*

*Tiraž:* *1000*

*Štampa:* *„Studio Branko" d.o.o. – Podgorica*

*Zavod za školstvo je odlukom broj 01 – 1214/2 od 03.09.2018. godine preporučio časopis „Dijagonala" za korišćenje u osnovnim školama kao pomoćno nastavno sredstvo.*


## Sadržaj

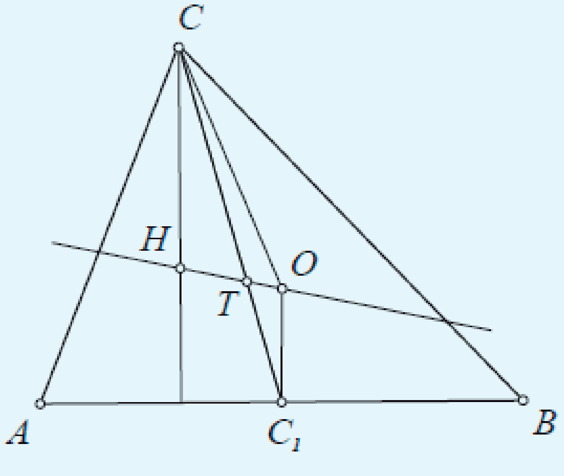
Kristina Radović

# OJLEROVA PRAVA I OJLEROV KRUG

Osim četiri značajne tačke, koje se izučavaju u osnovnoj školi, svaki trougao posjeduje još mnoga značajna i zanimljiva tvrđenja i tačke o kojima će biti riječi u narednom tekstu.

Ortocentar $H$, težište $T$ i centar opisanog kruga $O$ bilo kog trougla uvijek pripadaju jednoj pravoj, dok se kod jednakostraničnog trougla ove tri tačke poklapaju. Dokaz da su ove tri tačke kolinearne prvi je 1765. godine izveo veliki švajcarski matematičar Leonard Ojler (Leonhard Euler, rođen 1707. u Bazelu – Švajcarska, a umro 1783. u Sank Peterburgu, u Rusiji), pa tako i ova prava nosi naziv Ojlerova prava.

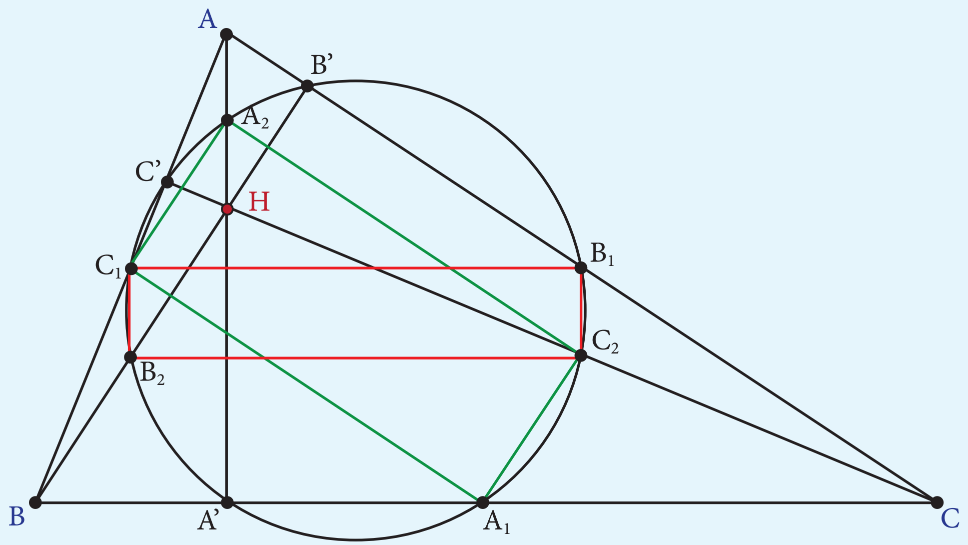
**Teorema.** (*Ojlerova prava*) U svakom trouglu tačke $H, T$ i $O$ su kolinearne i važi $HT = 2TO$.




**Dokaz.** Neka su $T$ i $O$ težište i centar opisanog kruga i neka je $P$ tačka na pravoj $OT$ takva da je $PT = 2TO$ i $P - T - O$. Neka je $C_1$ središte stranice $AB$. Trouglovi $C_1OT$ i $CPT$ su slični jer je $\measuredangle C_1TO = \measuredangle CTP$ i $C_1T : CT = OT : PT = 1 : 2$. Odatle dobijamo da je $\measuredangle OC_1T = \measuredangle PCT$ što povlači da su prave $OC_1$ i $PC$ paralelne. Kako je $OC_1 \perp AB$ (*$OC_1$* je simetrala stranice $AB$) to je i $PC \perp AB$. Analogno se dobija da su i prave $BP$ i $AP$ visine trougla $ABC$, pa se tačka $P$ poklapa sa ortocentrom, tj. $P \equiv H$.

**Zadatak.** Ako su $A_1$, $B_1$ i $C_1$ središta stranica $BC, CA, AB$ trougla $ABC$, dokazati da se Ojlerova prava trougla $A_1B_1C_1$ poklapa sa Ojlerovom pravom trougla $ABC$.

**Rješenje.** Središte $O$ kruga opisanog oko trougla $ABC$ je ortocentar trougla $A_1B_1C_1$, a težište $T$ trougla $ABC$ istovjetno sa težištem trougla $A_1B_1C_1$, pa se Ojlerova prava trougla $A_1B_1C_1$ poklapa sa Ojlerovom pravom trougla $ABC$.




Razmotrimo sada krug devet tačaka, koji se u literaturi još pojavljuje pod nazivima Ojlerov krug ili Fojerbahov krug. Fojerbah je otkrio da podnožja visina trougla kao i središta duži koje spajaju otrocentar sa tjemenima trougla pripadaju istom krugu, a Ojler je 1765. godine pokazao da taj krug sadrži i središta stranica trougla.

**Teorema.** (*Ojlerov krug*) Središta stranica, podnožja visina i središta duži koje spajaju ortocentar sa tjemenima prozvoljnog trougla pripadaju jednom krugu.

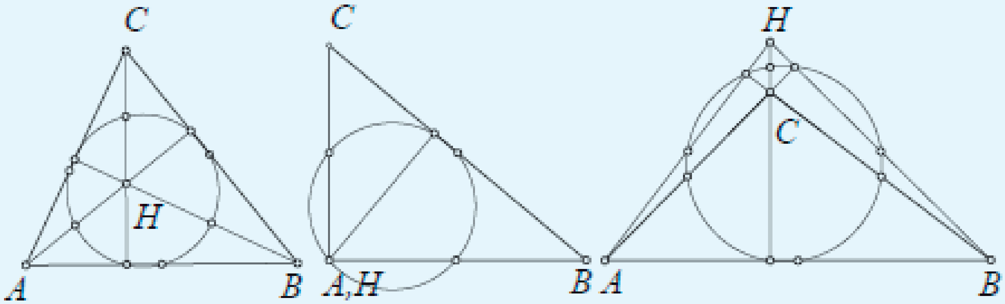
**Dokaz.** Pokazaćemo najprije da važi tvrđenje: ako je $H$ ortocentar trougla $ABC$ i ako su $C_1$, $B_1$, $C_2$, $B_2$ središta duži $AB, AC, HC, HB$ redom, tada je četvorougao $C_1B_1C_2B_2$ pravougaonik.

Duži $C_1B_1$ i $C_2B_2$ su središnje linije trouglova $ABC$ i $HBC$ i odgovaraju istoj ivici $BC$, pa su kao takve podudarne i paralelne. Dakle, četvorougao $C_1B_1C_2B_2$ je paralelogram. Dovoljno je pokazati još da mu je jedan ugao prav. Duž

$C_1B_2$ je srednja linija trougla $ABH$, pa je paralelna sa $AH$, tj. sa visinom trougla iz tjemena $A$. Dakle, $C_1B_2$ je normalna na ivicu $BC$, odnosno njoj paralelnu duž $C_1B_1$, pa je paralelogram $C_1B_1C_2B_2$ zaista pravougaonik. Slično, ako je $A_1$ središte ivice $BC$ i $A_2$ središte duži $AH$, tada je i $A_1C_2A_2C_1$ takođe pravougaonik. Kako je $C_1C_2$ zajednička dijagonala tih pravougaonika, oko njih se može opisati krug (nad $C_1C_2$ kao prečnikom). Ostaje da dokažemo da i podnožja visina pripadaju tom krugu. Tačka $A'$ kao podnožje visine iz tjemena $A$ pripada tom krugu jer je ugao $A_2A'A_1$ prav ($A_1A_2$ prečnik). Slično se dokazuje i za preostale dvije tačke.

Središta duži $HA, HB, HC$, gdje je $H$ ortocentar trougla $ABC$, nazivaju se Ojlerovim tačkama. Centar ovog kruga nazivamo centar devet tačaka. On takođe spada u značajne tačke trougla.

Na slici su prikazani oštrougli, pravougli i tupougli trougao i njihovi Ojlerovi krugovi. Uočimo da se u pravouglom trouglu neke od tih devet tačaka podudaraju.

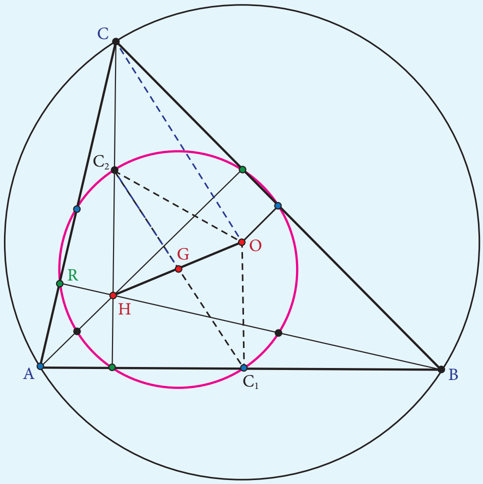



**Teorema.** Neka su $O$ i $H$ redom centar opisanog kruga i ortocentar trougla $ABC$ i neka je krug $K(G, r)$ Ojlerov krug za trougao $ABC$. Tada je $G$ središte duži $OH$ i $r = \frac{1}{2}R$, gdje je $R$ poluprečnik opisanog kruga.

**Dokaz.** Na osnovu teoreme koja kaže da je rastojanje od tjemena do ortocentra trougla dvaput veće od rastojanja centra opisanog kruga od naspramne stranice imamo da je (teorema o Ojlerovoj pravoj – trouglovi CHT i COT slični)

$$OC_1 = C_2H = C_2C, \quad (*)$$

pa je $C_1OC_2H$ paralelogram. Duž $C_1C_2$ je normalna na $OH$ i označimo njihovu




presječnu tačku sa $X$. Tačka $X$ je središte duži $C_1C_2$ i $OH$. Iz teoreme o Ojlerovom krugu slijedi da je tačka $G$ središte duži $C_1C_2$. Tačke $X$ i $G$ se poklapaju. Iz jednakosti (*) slijedi da je i $C_1OCC_2$ paralelogram, pa je $C_1C_2 = OC = R$ i $2r = R$.

**Teorema.** Za centar opisanog kruga $O$, težište $T$ i središte $G$ Ojlerovog kruga trougla $ABC$ važi $OT = 2TG$.

**Dokaz.** Prema prethodnoj teoremi tačka $G$ je središte duži $OH$ pa je $OG = \frac{1}{2}OH$, a na osnovu teoreme o Ojlerovoj pravoj je $HT = 2OT$, odnosno

$$OT = \frac{1}{3}OH \quad (**) .$$

Tačke $O, H, T$ su kolinearne, a kako je tačka $G$ središte duži $OH$, to su ove četiri tačke kolinearne. Zato je

$$GT = OG - OT = \frac{1}{2}OH - \frac{1}{3}OH = \frac{1}{6}OH \quad (***).$$

Iz jednakosti $(**)$ i $(***)$ slijedi $OT\!: GT = \frac{1}{3}OH\!:\!\frac{1}{6}OH = 2 : 1$, tj. $OT = 2TG$.

Dokaz sledeće teoreme prepuštamo zainteresovanom čitaocu.

**Teorema.** Neka su $a, b, c$ dužine stranica trougla $ABC, R$ poluprečnik opisanog kruga i $G$ centar Ojlerovog kruga. Tada važi:

$$AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{1}{4}(3R^2 + a^2 + b^2 + c^2).$$

Dr Goran Šuković

# CIKLUSI - naredba `while`

Kada dio koda želimo da izvršimo više puta tada koristimo „naredbe ciklusa“. Jedna od naredbi ciklusa je naredba `while`

1. Opšti oblik naredbe `while`:
```
while(logicki uslov)
{
   Naredbe1
}
```

2. Logički uslov (engl. boolean expression) mora imati vrijednost `true` ili `false`. Blok `Naredbe1`, se izvršava sve dok je logički uslov tačan (`true`); kada uslov postane netačan (`false`) izvršava se prva naredba iza naredbe `while`.
3. Obratite pažnju da poslije `while` **nema** simbola tačka-zapeta.

Primjeri upotrebe naredbe `while`.

```
/* Primjer 1-a
Stampati 10 puta broj 5, po jedan broj u redu
*/
            int brojac; // broji koliko smo puta stampali
            brojac = 0; // na pocetku, nijednom nismo stampali
            while (brojac < 10)
            {
                  cout << 5 << endl;
                  brojac  = brojac + 1;
            }
            // vrijednost promjenljive brojac u ovom trenutku je 10
```

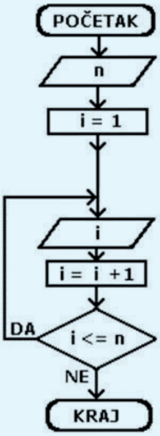
```
/* Primjer 1-b
* Stampati sve brojeve od 500 do 800, po jedan u redu
*/
            int brojac;
            brojac = 500; // na pocetku, brojac sadrzi prvi broj koji
stampamo
            while (brojac < 800)
            {
                  cout << brojac << endl;
                  brojac = brojac + 1;
            }
            // vrijednost promjenljive brojac u ovom trenutku je 800
```

```
/* Primjer 2-a
* Ucitati broj n i stampati vase ime n puta.
*/
            int n, brojac;
            cin>>n;
            brojac = 0; //
            while (brojac < n)
            {
                  cout << "Goran" << endl;
                  brojac = brojac + 1;
            }
```

```
/* Primjer 2-b
* Ucitati broj n i stampati redni broj i vase ime n puta.
*/
            int n, brojac;
            cin>>n;
            brojac = 0; //
            while (brojac < n)
            {
                  cout << brojac+1 << "."  << " Goran"  << endl;
                  brojac = brojac + 1;
            }
```

```
/* Primjer 3-a
Stampati svaki drugi broj od 500 do 800, po jedan u redu
*/
            int brojac;
            brojac = 500; // na pocetku, brojac sadrzi prvi broj koji stampamo
            while (brojac <= 800)
            {
                  cout << brojac << endl;
                  brojac = brojac + 2;
            }
            // vrijednost promjenljive brojac u ovom trenutku je 802
```

Primjer 3-b Ucitati prirodan broj n i stampati sve prirodne brojeve od 1 do n




```
int n = 0;
cin >> n;

int i = 1;
while (i<=n)
{
      cout << i << endl;
      i = i +1;
}
```

```
/* Primjer 4
Stampati sve brojeve iz segmenta [0,100] koji su djeljivi sa 3, od najveceg ka
najmanjem
*/
            int brojac;
            brojac = 100; // na pocetku, brojac sadrzi prvi broj
            while (brojac >= 0)
            {
                  if (brojac % 3 == 0) // ako je tekuci broj djeljiv sa 3
                  {
                        cout<< brojac << endl;
                  }
                  brojac = brojac - 1;
            }
```

```
/* Primjer 4 - drugo rjesenje
Prethodno rjesenje ima 101 prolazak kroz petlju while.
 Ovo rjesenje ima samo 34 prolaska kroz petlju.
*/
            int brojac;
            // na pocetku, brojac sadrzi prvi broj koji je
            // manji od 100 i koji je djeljiv sa 3
            brojac = 99;
            while (brojac >= 0)
            {
                  cout<< brojac << endl;
                  brojac = brojac - 3;
            }
```

```
/* Primjer 5
Izracunati i stampati zbir svih brojeva iz segmenta [a,b]  (uzeti a=500, b=800)
*/
            int a = 500, b = 800, zbir = 0;
            int brojac = a; // na pocetku, brojac sadrzi prvi sabirak
            while (brojac <= b)
            {
                  zbir = zbir + brojac;
                  brojac = brojac + 1; // prelazimo na sljedeci sabirak
            }
            cout<< zbir << endl;
```

```
/* Primjer 6
Ucitati dva cijela broja a i b i stampati sve cijele brojeve od a do b,
ukljucujuci i njih, u rastucem poretku (od najmanjeg ka najvecem).
 */
            int a, b, brojac;
            cin>>a>>b;
            int veci, manji;
            if (a<b)
            {
                  manji = a;
                  veci = b;
            }
            else
            {
                  manji = b;
                  veci = a;
            }
            brojac = manji; // na pocetku, brojac sadrzi najmanji broj
            while (brojac <= veci)
            {
                  cout<< brojac << endl;
                  brojac = brojac + 1; // prelazimo na sljedeci broj
            }
```

```
/* Primjer 7
Izracunati i stampati zbir svih brojeva iz segmenta [a,b] koji su djeljivi sa
7
 */
            int zbir = 0, a= 100, b = 200;
            int brojac = a; // na pocetku, brojac sadrzi prvi sabirak
            while (brojac <= b)
            {
                  if (brojac % 7 == 0)
                  {
                        zbir = zbir + brojac;
                  }
                  brojac = brojac + 1; // prelazimo na sljedeci sabirak
            }
            cout<< zbir << endl;
```

## Zadaci za vježbu `(while)`

1. Napisati program koji učitava cijele brojeve a i b i štampa sve cijele brojeve iz intervala [$a$,$b$], od najvećeg ka najmanjem.
2. Napisati program koji učitava cijele brojeve a i b i štampa sve neparne cijele brojeve iz intervala [$a$,$b$], od najvećeg ka najmanjem.
3. Napisati program koji učitava cijele brojeve a i b i štampa sve cijele brojeve iz intervala [$a$,$b$] koji pri dijeljenju sa 7 daju ostatak 1 ili ostatak 4.
4. Napisati program koji učitava cijele brojeve a i b i štampa zbir svih cijelih brojeva iz intervala [$a$,$b$].
5. Napisati program koji učitava cijele brojeve a i b i štampa zbir kvadrata svih neparnih cijelih brojeva iz intervala [$a$,$b$].
6. Napisati program koji učitava prirodni broj n i štampa n! (n! = 1 · 2 · ... · n)
7. Napisati kod koji učitava prirodan broj n i štampa sve njegove pozitivne djelioce.
8. Napisati kod koji učitava prirodan broj n i štampa zbir svih pozitivnih djelilaca broja n.
9. Prirodan broj n je savršen ako je jednak zbiru svih svojih pozitivnih djelilaca koji su manji od n. Npr. broj 6 je savršen, jer su djelioci broja 6 redom 1, 2 i 3 i važi 1 + 2 + 3 = 6. Napisati program koji učitava prirodan broj n i provjerava da li je savršen, i ako jeste, štampa poruku “Savršen”, a ako nije savršen, štampa “Nije savršen”.
10. Unosi se cio broj n, a zatim n cijelih brojeva, po apsolutnoj vrijednosti manjih od 100000. Štampati njihov zbir.
11. Unosi se cio broj n, a zatim n cijelih brojeva, po apsolutnoj vrijednosti manjih od 100000. Štampati njihovu prosječnu vrijednost.
12. Unosi se cio broj n, a zatim n cijelih brojeva, po apsolutnoj vrijednosti manjih od 100000. Štampati najmanji od njih.
13. Brojeve $x_1$, $x_2$,..,$x_n$ formiramo na sljedeći način: $x_1 = 1$, $x_2 = 7$,..., $x_n = 2n^2 - 1$. Napisati program koji učitava prirodan broj n i štampa sve brojeve $x_1$, $x_2$,...,$x_n$, po jedan u redu.
14. Brojeve $x_1$, $x_2$,..,$x_n$ formiramo na sljedeći način: $x_1$=1, $x_n=(2n-1)x_{n-1}-n$. Napisati program koji učitava prirodan broj n i štampa sve brojeve $x_1$, $x_2$,..,$x_n$, po jedan u redu.

# ODABRANI ZADACI

## VI razred

1. Dva radnika mogu da završe jedan posao za $2\frac{2}{5}$ radnog dana. Ako bi radio samo prvi radnik, trebalo bi mu 4 dana da sam završi posao. Koliko bi dana trebalo drugom radniku da posao završi sam?
2. Dato je 13 zlatnika istog oblika, pri čemu samo jedan zlatnik ima masu različitu od ostalih 12. Kako pomoću tri mjerenja, na vagi sa tasovima, odrediti koji je zlatnik neispravan?
3. Odrediti sve proste brojeve $x$ koji zadovoljavaju nejednakost: $\frac{2}{145} < \frac{1}{x} < \frac{3}{194}$.
4. Dokazati da je zbir prvih 1000 prirodnih brojeva djeljiv sa 77.

## VII razred

1. Dokazati da u svakom trouglu važi nejednakost $t_a + t_b + t_c > \frac{3}{2}s$, pri čemu su $t_a$, $t_b$ i $t_c$ težišne duži trougla, a s poluobim.
2. Konstruisati pravougli trougao sa pravim uglom kod tjemena C ako je data razlika kateta $b - a = 2$ cm i ugao $\alpha = 30°$.
3. Jedan radnik može da završi posao za 20 dana, a drugi radnik taj isti posao može da završi za 15 dana. Ako se obojici pridruži treći radnik, onda će sva trojica posao završiti za 5 dana. Za koliko dana bi treći radnik sam završio taj posao?
4. U paralelogramu ABCD stranica AB je dva puta duža od stranice BC. Ako je tačka P sredina stranice AB, tada je ugao CPD prav. Dokazati.

## VIII razred

1. Dokazati da je za svaki prirodan broj $n > 1$, broj $n^4 + 4$ složen!
2. Cijena kilograma krušaka se nakon poskupljenja od 20% zapisivala istim ciframa kao i prije povećanja, ali u obrnutom redosledu cifara. Kolika je bila cijena kilograma krušaka prije poskupljenja, ako je nakon poskupljenja bila manja od 90 centi?
3. Uglovi trougla se odnose kao 2:3:7, a najduža stranica trougla je 10 cm. Izračunati obim tog trougla.
4. Dat je konveksan četvorougao ABCD sa pravim uglom kod tjemena B, pri čemu njegove stranice imaju dužine: AB = 3 cm, BC = 4 cm, CD = 12 cm i DA = 13 cm. Izračunati površinu tog četvorougla.

## IX razred

1. Površine strana kvadra su 12 $cm^2$, 36 $cm^2$ i 48 $cm^2$. Izračunati dužinu prostorne dijagonale kvadra i njegovu zapreminu.
2. Mjerni brojevi površine i zapremine pravilne trostrane piramide su jednaki. Izračunati dužinu osnovne ivice te piramide, ako njena apotema obrazuje sa ravni osnove ugao od 60°.
3. Ako je $x^3 + y^3 = 18$ i $x^2y + xy^2 = 3$, izračunati $x + y$.
4. Seljak je imao kravu, magare i kozu i stog sijena. Izračunao je da ima sijena da hrani kozu i magare jedan mjesec, ili kravu i magare $\frac{1}{3}$ mjeseca, ili kozu i kravu $\frac{3}{4}$ mjeseca. Da li je seljak dobro računao?

# ZADACI ZA VJEŽBU

## VI razred

### I nivo

1) Dopisati broj koji nedostaje u razlomku tako da jednakost bude tačna:

a) $\frac{7}{7} = \frac{\quad}{1}$; b) $\frac{\quad}{7} = 7$; c) $\frac{77}{\quad} = 7$; d) $\frac{7}{77} = \frac{1}{\quad}$; e) $\frac{77}{11} = \frac{7}{\quad}$

2) Zaokružiti slovo ispred tačne jednakosti:

a) $0{,}2 = \frac{1}{2}$; b) $\frac{3}{4} = 0{,}75$; c) $\frac{2}{5} = 0{,}4$; d) $\frac{7}{10} = 0{,}07$; e) $2{,}8 = 2\frac{1}{8}$

3) Uporediti:

a) $1+\frac{2}{5}$ i $\frac{8}{5}-1$; b) $2-\frac{1}{2}$ i $1+\frac{1}{3}$; c) $4{,}5 + 0{,}5$ i $5{,}5 - 0{,}5$; d) $3{,}09 - 1{,}97$ i $1{,}26 + 0{,}95$.

4) Ako je $b = a + 5,\ a, b \in N,$ šta je veće: $\frac{a}{12}$ ili $\frac{b}{8}$?

5) Na pitanje koji im je omiljeni napitak, učenici jedne škole su dali sljedeće odgovore:

| Napitak | Prirodni sok | Coca Cola | Fanta | Topla čokolada |
|---|---|---|---|---|
| Broj učenika | 48 | 32 | 14 | 22 |

a) Koliko je ukupno učenika ispitano?

b) Izraziti nesvodljivim razlomkom dio ispitanih učenika koji su se opredijelili za svaki od ovih napitaka.

6) Napisati bar tri broja koja se nalaze između:

a) $\frac{2}{5}$ i 1; b) 2,7 i 2,8; c) 3,13 i $\frac{22}{7}$ .

7) Jedan od datih izraza ima vrijednost 5:
$A = (12{,}8 - 4{,}8) - (5{,}67 + 0{,}7)$; $B = 10 - (8{,}4 - 5{,}63) - 2{,}23$;
$C = 15{,}4 - (2{,}54 - (10{,}9 - 9{,}01))$.

a) Koji je to izraz?

b) Za koliko se njegova vrijednost razlikuje od vrijednosti svakog od ostalih izraza?

8) Miloševa kuća je udaljena od teniskih terena 120,5 metara, a Martinova 99,2 metara. Dogovorili su se da odigraju partiju tenisa i poslije telefonskog razgovora krenuli prema igralištu. Miloš je prešao 72,8 m, a Martin 54,9 m. Ko je od njih bliži igralištu?

9) Riješiti jednačine: a) $x - 3{,}5 = \frac{2}{3}$; b) $11{,}3 - x = 5\frac{1}{2}$; c) $x + \frac{3}{5} = 2\frac{1}{2}$

10) Riješiti nejednačine: a) $5 - x > 3\frac{3}{5}$; b) $x - 5\frac{3}{5} < 10$; c) $3{,}5 + x \geq 7\frac{3}{4}$.

11) Nacrtati kvadrat ABCD i središta njegovih stranica AB, BC i CD označiti redom slovima P, Q i R. Nacrtanom kvadratu konstruisati simetričan kvadrat u odnosu na pravu ***s*** određenu tačkama:

a) A i Q; b) P i Q; c) Q i R.

## II nivo

1) Vrijednosti datih izraza a, b, c i d poređati od najmanjeg do najvećeg:

$a = 3\frac{1}{3} + \frac{5}{6} - 2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{6}$; $b = 3\frac{1}{3} - \frac{5}{6} + 2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{6}$;

$c = \left(5\frac{2}{3} - 2\frac{7}{9}\right) - \left(1\frac{5}{9} - \frac{4}{3}\right)$; $d = 5\frac{2}{3} - \left(2\frac{7}{9} + 1\frac{5}{9} + \frac{4}{3}\right)$.

2) Odrediti razlomak jednak razlomku $\frac{3}{5}$ kod koga je:

a) zbir brojioca i imenioca 40;

b) razlika imenioca i brojioca 18;

c) proizvod brojioca i imenioca 135.

3) Radnici rasadnika "Jela" pripremili su 1260 sadnica za Proljećni sajam. Prodali su $\frac{5}{6}$ pripremljenog materijala. Da li su njihovi konkurenti bili uspješniji ako su pripremili 1350 sadnica, a prodali $\frac{7}{9}$ od toga?

4) Ako je: $a = 5{,}4 - \frac{4}{5}$; $b = 1\frac{1}{2} + 0{,}8$ i $c = 2\frac{7}{10} - 1{,}1$ izračunati:

a) $a + b + c$; b) $a - b - c$; c) $(a - b) - (b - c)$.

5) Kamen bačen sa mosta u rijeku pređe u prvoj sekundi $3\frac{5}{8}$ m, a u svakoj sljedećoj sekundi za $9\frac{4}{5}$ m više nego u prethodnoj. U rijeku je pao poslije tri sekunde. Kolika je visina mosta?

6) Kada je kupio jaknu koju je platio $\frac{5}{8}$ sume novca koji je ponio i patike koje su koštale $\frac{2}{5}$ od cijene jakne, Milanu je ostalo 50 €. Koliko je novca Milan ponio?

7) Odrediti prirodan broj $n$ tako da nejednakost bude tačna.

$\frac{5}{4} < \frac{n}{4} < \frac{19}{8}$; b) $\frac{13}{5} < \frac{n}{8} < 4\frac{1}{20}$.

8) Prvi član niza je 25, a svaki sljedeći je za 3,8 manji id prethodnog. Svi članovi niza su veći od nule. Odrediti peti član tog niza. Kolika je razlika najvećeg i najmanjeg člana?

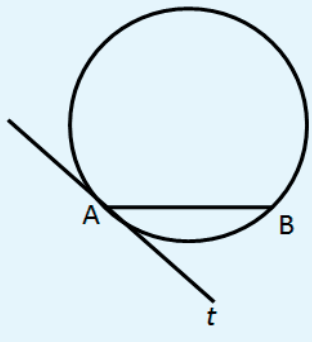
9) Riješiti jednačine: a) $10\frac{5}{8} - \left(x - 4\frac{2}{5}\right) = 8\frac{5}{12}$;

b) $\left(5\frac{7}{10} - a\right) + 2\frac{2}{5} = 3$; c) $\left(x + 12\frac{11}{18}\right) - 4{,}5 = 11\frac{2}{3}$.

10) Riješiti nejednačine: a) $(5{,}5 + x) - 7\frac{1}{4} > 3\frac{1}{2}$;

b) $10 - \left(x + 1\frac{3}{4}\right) \leq 5\frac{4}{9}$; c) $9{,}8 + \left(3\frac{1}{2} - y\right) \geq 10\frac{1}{4}$.

11) Konstruisati centar kružnice kojoj je duž AB tetiva, a prava ***t*** tangenta u tački A.




**Ljujić Nevena, JU OŠ „Dušan Korać“, Bijelo Polje**

## VII razred

### I nivo

1) Nacrtati tupougli trougao, pa mu odrediti: a) centar opisane kružnice; b) ortocentar.
2) U pravouglom trouglu konstruisati; a) centar upisane kružnice; b) težište.
3) U jednakokrakom trouglu konstruisati sve četiri karakteristične tačke.
4) Poređati od najmanjeg do najvećeg brojeve:
a) $-\frac{2}{3}; -\frac{5}{6}; -\frac{7}{4}; -\frac{11}{12}; -\frac{13}{24}; -\frac{7}{8};$ b) – 0,25; – 0,3; – 0,3201; – 0,3210; – 0,205.
5) Izračunati: a) $(-\frac{7}{6}+1\frac{1}{2})-\frac{3}{4}$; b) $(-8+4\frac{2}{3})+1\frac{1}{8}$; c) – 2,4 + (3 – 5,6) d) – 11 – (– 9,45 + 7,55).
6) Šta je veće: $(-12+7\frac{2}{3})+(-12+11\frac{1}{4})$ ili $-12+(7\frac{2}{3}+11\frac{1}{4})$?
7) Razlici brojeva $-5\frac{1}{6}$ i $-7\frac{3}{8}$ dodati zbir brojeva – 10 i $7\frac{5}{6}$.
8) Broj – 20 umanjiti za zbir brojeva $-1\frac{1}{5}$, $2\frac{2}{3}$, $-5\frac{7}{9}$ i $1\frac{7}{45}$.
9) Riješiti jednačine: a) $-5+(11\frac{1}{2}-x)=-2\frac{3}{7}$; b) $-6\frac{3}{8}-(-4\frac{2}{5}+x)=-2\frac{1}{2}$; c) – 3,2 + (0,5 + x –1,25) = – 0,8 + 5.
10) Riješiti nejednačine: a) $x-1\frac{5}{8}\leq\frac{1}{6}-\frac{1}{2}$; b) $-14+(x+11\frac{2}{5})>-5\frac{1}{6}$; c) $(-2{,}76+3)+(x-5{,}12)\leq 1{,}42-0{,}7$.

### II nivo

1) a) Izračunati x ako je: – x = –(–(–(+ 3,5)));
b) Izračunati |x| ako je: $-x=-(-(-(-(-1\frac{1}{2}))))$.
2) Tačke A(–20) i B(–13) koje leže na koordinatnoj osi su simetrične jedna drugoj u odnosu na tačku C. Odrediti koordinatu tačke C, a potom odrediti koordinatu tačke koja je simetrična tački M(1) u odnosu na tačku C.
3) Konstruisati trougao sa elementima AB = 4,5 cm, AC = 5 cm i $\sphericalangle A = 120°$, a potom odrediti sve četiri značajne tačke.
4) Konstruisati pravougli trougao sa katetama a = 5 cm i b = 6,5 cm, pa mu konstruisati opisanu kružnicu i ortocentar. Šta zaključuješ?
5) a) Konstruisati trougao ako je dato: $\alpha = 67°30'$, $h_c = 3{,}5$ cm i $t_c = 4{,}8$ cm;

b) Konstruisati jednakokraki trougao ako je $\gamma = 45°$ i $h_c = 5$ cm (tjeme C je vrh trougla).

6) Izračunati:

a) $-12 - [13\frac{1}{4} - (5\frac{2}{3} + 7\frac{1}{2}) - \frac{1}{12}]$; b) $-5\frac{1}{2} + [-10 - (6\frac{7}{8} - 9\frac{1}{4}) + 1\frac{3}{8}]$.

7) Naći x:

a) $-3\frac{2}{3} - (-7\frac{1}{2} + x) = -3\frac{3}{4} + (6\frac{1}{2} - 3\frac{5}{6})$;

b) $-5\frac{1}{3} + (2\frac{5}{8} - (-1\frac{1}{4} + x)) \leq -7\frac{5}{12}$.

8) Ako razliku brojeva $-3\frac{2}{3}$ i $-1\frac{1}{2}$ uvećanu za zbir brojeva $-\frac{5}{6}$ i x oduzmemo od broja 4, dobiće se $-\frac{1}{2}$. Izračunati nepoznati broj x.

9) Konstruisati ΔABC obima O = 12 cm, ako je ugao $\alpha = 60°$ i visina $h_c = 3$ cm.

10) Izračunati ugao $\gamma$ u trouglu ABC ako je $\beta = 42°$, a visine CD i AF se sijeku u tački M za koju važi da je AM = MC.

**Ljiljana Kruška, JU OŠ „Luka Simonović", Nikšić**

## VIII razred

### I nivo

1. Odrediti rješenja jednačina:

a) $3x - 2 = 2x - 3$; b) $3\cdot(x - 2) = 2\cdot(x - 1)$; c) $\frac{3y}{7} - \frac{2y}{5} = 2$.

2. Pokazati da su jednačine: $\frac{x+1}{3} - \frac{x}{4} = \frac{1}{2}$ i $x = 2$ ekvivalentne.

3. Riješiti nejednačine i skup rješenja prikazati na brojevnoj pravoj :

a) $x + 1 \leq 2 - 3x$; b) $2a - 1 > 3a + 4$; c) $\frac{2z-3}{4} - \frac{z-1}{3} > \frac{z}{2}$.

4. Odrediti skup rješenja nejednačina: a) $2\cdot(3y - 1) > 3\cdot(2y + 1)$;

b) $5 \cdot (2m + 3) > 2 \cdot (5m - 2)$; c) $3t - 3 \geq 3\cdot(t - 1)$.

5. Koji broj uvećan za 15 i podijeljen sa 3 daje količnik 9?

6. Da li je trougao pravougli ako ima stranice dužina:

a) a = 12cm, b = 1cm i c =13cm; b) x = 0,8cm , y = 1cm i z = 0,6cm?

7. Katete pravouglog trougla su rješenja jednačina:

$4a - 8 + 2a = -12 + 3a + 13$ i $4 \cdot (b - 2) = 2\cdot(b + 4) - 8$.

Odrediti dužinu hipotenuze, obim i površinu trougla.

8. Biciklista je najprije vozio 10 km na sjever, zatim 24 km na istok, a potom se najkraćim putem vratio na početnu poziciju. Koliko je ukupno kilometara biciklista prešao?
9. Konstruisati duži dužina: a) $\sqrt{2}$ cm, b) $\sqrt{8}$ cm, c) $\sqrt{10}$ cm.
10. a) Izračunati obim i površinu kvadrata čija je dijagonala dužine:
    1) $4\sqrt{2}$ cm, 2) 6 cm.
    b) Izračunati obim i površinu pravougaonika, čija je jedna stranica 5 cm, a dijagonala 13 cm.

## II nivo

1. Riješiti jednačine:

   a) $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = 1$; b) $\frac{p+1}{7} - \frac{3(p-2)}{14} = 1$;

   c) $1{,}2x - (0{,}3x - 2{,}3) + 5{,}7x = 11{,}2 - (2x + 0{,}3)$;

   d) $\frac{1}{8}(x-2) - \frac{1}{3}(2x+1) = \frac{3}{4}(5x+2) + 3\left(4x - \frac{1}{2}\right) - \frac{295}{3}$;

   e) $\frac{\frac{1}{4}x-1}{3} - \frac{\frac{5}{2}x+4}{4} = \frac{\frac{3}{2}x-2}{6} + \frac{1-\frac{3}{4}x}{4} - \frac{43}{6}$.

2. Riješiti jednačine:

   a) $x^2 - 6x + 5 = (x-7)(x+7)$; b) $x^2 + 3x - 8{,}25 = (x+0{,}5)^2$;

   c) $\left(2x - \frac{1}{2}\right)\left(2x + \frac{1}{2}\right) = (2x + 0{,}5)^2$.

3. Riješiti nejednačine i skup rješenja prikazati na brojevnoj pravoj :

   a) $\frac{2(3x-1)}{5} - \frac{2x+1}{3} < \frac{4x-1}{2} + \frac{3x-2}{3}$; b) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} < 0$;

   c) $\frac{2p+1}{7} - \frac{p+3}{2} > 0$.

4. Za koje vrijednosti $x$ je razlomak $\frac{12x+7}{3}$ pozitivan?

5. Riješiti nejednačine:

   a) $(17 - 2x)(12 - x) > 0$; b) $\frac{5x-1}{0{,}2-x} > 0$; c) $(8 - 0{,}5x)(3 + 0{,}2x) < 0$.

6. Pantalone su dva puta skuplje od sakoa. Koliko košta sako, ako je cijena kompleta 870 dolara?
7. Otac ima 28 godina, a sin 6 godina. Za koliko će godina zajedno imati dva puta više godina nego danas?
8. Stranice pravougaonika su 12 cm i 16 cm. Izračunati rastojanje tjemena A od dijagonale BD.
9. Dat je kvadrat ABCD stranice 8 cm. Tačke E i F su na stranicama AB i BC tako da je BE = BF = 2 cm. Izračunati obim i površinu četvorougla EBFD.
10. Izračunati dužine težišnih duži pravouglog trougla ABC ($\sphericalangle C = 90^\circ$) ako je $a = 4$cm i $\alpha = 60^\circ$.

**Jasna Todorović i Ljiljana Vučić, JU OŠ „Milija Nikčević", Nikšić**

## IX razred

### I nivo

1) Zapremina pravilne trostrane prizme je $72\sqrt{3}\,\text{cm}^3$. Izračunati površinu te prizme, ako je njena visina 8 cm.
2) Osnova prave prizme je romb čije su dijagonale 12 cm i 16 cm. Izračunati zapreminu te prizme, ako je dijagonala bočne strane te prizme 15 cm.
3) Osnova prave prizme je pravougli trougao čija je jedna kateta 4 cm, a druga za 2 cm kraća od hipotenuze. Izračunati zapreminu te prizme, ako je površina njenog omotača $120\ \text{cm}^2$.
4) a) Izračunati površinu i zapreminu pravilne četvorostrane piramide čija je osnovna ivica 10 cm i apotema 13 cm.
   b) Izračunati površinu i zapreminu pravilne šestostrane piramide čija je visina 8 cm i izvodnica 10 cm.
5) Površina osnove pravilne šestostrane piramide je $96\sqrt{3}\,\text{cm}^2$. Izračunati površinu i zapreminu te piramide, ako je njena apotema $6\sqrt{3}\,\text{cm}$.
6) Obim osnove pravilne trostrane piramide je 36 cm, a površina omotača $108\ \text{cm}^2$. Izračunati površinu i zapreminu te piramide.
7) Poluprečnik kružnice opisane oko osnove pravilne četvorostrane piramide iznosi $6\sqrt{2}\,\text{cm}$. Izračunati površinu i zapreminu te piramide ako je njena visina 8 cm.
8) Grafički riješiti sistem:

   $a)\ \begin{cases} 3x - y = 5 \\ -2x + y = -3 \end{cases}$ $\qquad$ $b)\ \begin{cases} -x + y = -5 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$

9) Riješiti sistem linearnih jednačina:

$a)\ \begin{cases} \frac{x-5}{3}+\frac{2y-1}{5}=-\frac{11}{15} \\ \frac{x+3}{2}-\frac{2-y}{5}=2 \end{cases}$  $b)\ \begin{cases} (x+3):(y-1)=2:3 \\ (x-5):(y-3)=4:1 \end{cases}$

10) Za tri kg jabuka i pet kg limuna treba platiti 13 eura, a za pet kg jabuka i tri kg limuna treba platiti 11 eura. Koliko košta kilogram jabuka, a koliko kilogram limuna?

## II nivo

1) Pravilna trostrana prizma i pravilna trostrana piramida imaju jednake zapremine. Izračunati visinu piramide ako osnovna ivica i visina prizme redom iznose 6 cm i 8 cm, a poluprečnik upisane kružnice u osnovu piramide iznosi $2\sqrt{3}$ cm.
2) Osnova prave prizme je jednakokraki trapez čija duža osnovica iznosi 18 cm, visina 4 cm i oštar ugao 45º. Izračunati zapreminu te prizme ako je bočna strana sa najvećom površinom kvadrat.
3) Veća prostorna dijagonala pravilne šestostrane prizme obrazuje sa ravni osnove ugao od 60º, a njena visina je 12 cm. Izračunati površinu i zapreminu te prizme.
4) Kraća prostorna dijagonala pravilne šestostrane prizme obrazuje sa ravni osnove ugao od 30º, a njena visina je 6 cm. Izračunati površinu i zapreminu te prizme.
5) Dijagonalni presjek pravilne četvorostrane piramide je jednakostranični trougao površine $144\sqrt{3}\,\text{cm}^2$. Izračunati površinu i zapreminu te piramide.
6) Izračunati površinu i zapreminu pravilne trostrane piramide čiji je poluprečnik kružnice upisane u osnovu $3\sqrt{3}$ cm, a bočna strana sa ravni osnove obrazuje ugao od 30°.
7) Izračunati površinu i zapreminu pravilne šestostrane piramide čija visina iznosi 6 cm, a bočna ivica sa ravni osnove obrazuje ugao od 60°.
8) Riješiti sistem:

a) $\begin{cases} (3x+2)^2-(y+3)(y-3)=(3x-y)(3x+y)+3y+22 \\ (x+2):(y+1)=3:2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{1}{x+y-1}+\frac{3}{x-y+2}=3{,}25 \\ \frac{2}{x+y-1}-\frac{5}{x-y+2}=-4{,}5 \end{cases}$

9) Ako cifru desetica nekog dvocifrenog broja podjelimo sa cifrom jedinica dobija se 3 i ostatak 1. Ako cifre zamijene mjesta odnos datog broja prema novome je 8:3. Koji je to broj?
10) Kada bi iz prve korpe sa lopticama prebacili u drugu 5 loptica tada bi u obije korpe bio jednak broj loptica. Ako bi iz druge korpe prebacili u prvu 10 loptica tada bi u prvoj bilo 4 puta više loptica nego u drugoj. Koliko loptica ima u prvoj, a koliko u drugoj korpi?

**Tanja Savović, JU OŠ „Marko Miljanov“, Podgorica**

# KONKURSNI ZADACI

## VI razred

1) Rade je nabavio 9 sadnica kivija. Radi boljeg oprašivanja i većeg prinosa, Rade je sadnice rasporedio u 10 redova, tako da u svakom redu budu po 3 sadnice. Postoje „muške“ i „ženske“ biljke kivija. „Muške“ ne donose plodove, već služe samo za oprašivanje. Da bi se sve biljke maksimalno oprašile, mora se u svaki red postaviti bar jedan „muški“ kivi. Kako je Rade propisno zasadio kivi sa minimalnim brojem „muških“ biljaka?

2) Dat je skup S={0,2,4,6,8,10,12}. Odrediti $A \cap B \cap C$ ako je

A=$\{a|a \in S$ i $\frac{a}{6} \in S\}$ B=$\{b|b \in S$ i $(\frac{b}{2}+\frac{b}{5}) \in S\}$ C=$\{c|c \in S$ i $\frac{c^2}{5} \geq c\}$

## VII razred

1) U ravni kvadrata PQRS data je tačka M tako da su duži RM i SM podudarne. Dokazati da su uglovi ∡SPM i ∡MQR jednaki.

2) Konstruisati jednakostranični trougao ako je poznata razlika stranice i visine trougla: a-h.

## VIII razred

1) Trougao ABC upisan je u krug k poluprečnika 10 cm. Ako se zna da je AC = BC i ∡C = 45°, izračunati površinu dijela kruga ograničenog stranicom trougla AB i lukom AB.
2) Uglovi na osnovici jednakokrakog trougla ABC iznose po 15°. Odredi odnos osnovice i kraka tog trougla.

## IX razred

1) Naći a + b ako je $a = \sqrt{5 - \sqrt{17 + 2\sqrt{7}}}$ i $b = \sqrt{5 + \sqrt{17 + 2\sqrt{7}}}$.

2) Brojevi od 1 do 10 zapisani su u proizvoljnom poretku i svaki od njih je sabran sa svojim rednim brojem. Dokazati da među dobijenim zbirovima postoje bar dva broja čija je poslednja cifra jednaka.

**Hidajeta Lukač, JU OŠ „Dušan Korać“, Bijelo Polje**

# RJEŠENJA KONKURSNIH ZADATAKA IZ PROŠLOG BROJA

## VI razred

1) Ako nekom broju dopišemo nulu s desna, pa dobijeni broj podijelimo sa 25, a zatim dobijenom količniku s desna dopišemo 1 i dobijeni broj podijelimo sa 17, dobija se broj 13. Koji je to broj?

2) Koliko ima četvorocifrenih prirodnih brojeva koji pri djeljenju sa 2, 3, 4, 5, 6 daju redom ostatke 1, 2, 3, 4, 5? Navedi najmanji i najveći broj.

**Rješenja:**

1) Prije poslijednjeg dijeljenja imali smo broj $17 \cdot 13 = 221$. Dakle, prije dopisivanja cifre 1 imali smo broj 22, a prije prvog dijeljenja sa brojem 25 imali smo broj broj $25 \cdot 22 = 550$. Dakle, prije dopisivanja cifre 0 imali smo broj 55. I to je traženi broj.

2) Neka broj x pri djeljenju sa 2,3,4,5,6 daje redom ostatke 1, 2, 3, 4, 5. Tada je broj x+1 djeljiv brojevima 2,3,4,5,6. Kako je NZS(2,3,4,5,6) = 60, slijedi $x = k \cdot 60 - 1$, k = 17, ... ,166. Dakle, ovakvih brojeva ima 150. Najmanji je 1019 (k = 17), a najveći 9959 (k = 166).

## VII razred

1) Dat je razlomak $\frac{57}{71}$. Koji broj treba oduzeti od brojioca, a dodati imeniocu, pa da se dobije razlomak koji posle skraćivanja iznosi $\frac{1}{3}$?

2) Četiri arhitekte su prošlog mjeseca radili na važnom projektu, zbog kojeg nisu mogli ići na godišnji odmor. Na taj način zaradili su prekovremeno ukupno 14135 eura. Ovaj iznos treba podijeliti arhitektama srazmjerno broju časova provedenih baveći se projektom. Brojevi časova koje su ove arhitekte proveli na poslu, stoje u razmjeri $a:b:c:d$, gdje su $a,b,c$ i $d$ razlomci kojima su imenioci jednocifreni brojevi i pri tom je $\frac{7}{9}<a<b<c<d<\frac{8}{9}$. Koliko je zaradio svaki arhitekta?

**Rješenja:**

1) Zadatak ćemo riješiti bez upotrebe jednačina, koristeći se činjenicom da razlomak $\frac{2a}{2a}$ dobija vrijednost $\frac{1}{3}$ ako se od brojioca oduzme njegova polovina, koja se doda imeniocu.

Podesićemo da u datom razlomku budu jednaki brojilac i imenilac. To ćemo postići ako od imenioca oduzmemo $7$ i isto toliko dodamo brojiocu. Na taj način dobijemo $\frac{64}{64}$. Na osnovu datog uputstva treba prepoloviti brojilac – oduzeti od njega 32, i za toliko uvećati imenilac: $\frac{64-32}{64+32}=\frac{32}{96}=\frac{1}{3}$. Upoređujući ovo sa datim razlomkom vidimo da je brojilac umanjen, a imenilac uvećan za 25.

2) Odredimo sve razlomke oblika $\frac{m}{n}$, gdje su m, n < 9 ($m,\ n \in N$) i $\frac{7}{9}<\frac{m}{n}<\frac{8}{9}$. Mijenjajući n od $2$ do 8, dobijamo tražene razlomke. Na primjer, za n = 5 je $\frac{7}{9}<\frac{m}{5}<\frac{8}{9}$. Svođenjem imenilaca na najmanji zajednički sadržalac dobićemo: $\frac{35}{45}<\frac{9m}{45}<\frac{40}{45}$, pa je m = 4, odnosno $\frac{m}{n}=\frac{4}{5}$. Tako izračunamo: $a=\frac{4}{5}, b=\frac{5}{6}, c=\frac{6}{7}, d=\frac{7}{8}$. Označimo sa A, B, C i D zarade arhitekata. Tada je $A:B:C:D=\frac{4}{5}:\frac{5}{6}:\frac{6}{7}:\frac{7}{8}$. Proširimo razlomke na desnoj strani (840 je najmanji zajedniči sadržalac za 5, 6, 7 i 8). Dobijamo

A : B : C : D = 672 : 700 : 720 : 735. Sada izvršimo podjelu zarade

$14135:(672+700+720+735)=14135:2827=5$.

Prema tome, zarade arhitekata su:
A = 672 · 5 = 3360 eura, B = 700 · 5 = 3500 eura,
C = 720 · 5 = 3600 eura i D = 735 · 5 = 3675 eura.

## VIII razred

1) Odrediti tri prosta broja takva da je njihov proizvod sedam puta veći od njihovog zbira.

2) Polinom $(x^2 + x - 1)(x^3 + x^2 + 1) - 1$ rastaviti na činioce, a zatim dokazati da on ima pozitivne vrijednosti za svako pozitivno x, a negativne za svako negativno x.

**Rješenja:**

1) Neka su p, q i r tri prosta broja koja se traže. Oni treba da ispune uslov:

$p \cdot q \cdot r = 7(p + q + r)$. Odavde slijedi da je jedan od njih, recimo r, jednak 7, tj. $r = 7$. Za određivanje p i q ostaje uslov: $p \cdot q = p + q + 7$ što se može zapisati kao $p \cdot q - p - q + 1 = 8$, odnosno $(p - 1)(q - 1) = 8$. Odavde slijedi da je $p - 1 = 1$ i $q - 1 = 8$ ili $p - 1 = 2$ i $q - 1 = 4$ ili obrnuto $p - 1 = 8$ i $q - 1 = 1$ ili $p - 1 = 4$ i $q - 1 = 2$. Jedini prosti brojevi koji zadovoljavaju ove uslove su $p = 5$ i $q = 3$ ili obrnuto. U svakom slučaju, traženi brojevi p, q i r su: 3, 5 i 7.

2) Oslobodimo se zagrada, pa rastavimo na činioce:

$(x^2 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1) - 1 = x^5 + x^4 + x^2 + x^4 + x^3 + x + x^3 + x^2 + 1 - 1 =$

$= x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x = x(x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1) =$

$= x(x^4 + 2x^3 + x^2 + x^2 + 2x + 1) =$

$= x(x^2(x^2 + 2x + 1) + (x^2 + 2x + 1)) = x(x^2(x + 1)^2 + (x + 1)^2) =$

$= x(x^2 + 1)(x + 1)^2$.

Znak ovog izraza je isti kao znak prvog činioca, broja x, jer izrazi $x^2 + 1$ i $(x + 1)^2$ ne mogu biti negativni. Odatle slijedi traženi zaključak.

## IX razred

1) Izračunati $f(2)$ ako se zna da je $\frac{1}{2}f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x.$

2) Naći brojeve x i y koji zadovoljavaju jednačinu
$9x^2+16y^2+6x-24y+10=0.$

**Rješenja:**

1) U datoj funkciji prvo uvrstimo $x=2,$ a zatim $x=\frac{1}{2}.$ Dobijamo jednakosti: $\frac{1}{2}f(2)+2f\left(\frac{1}{2}\right)=2$ i $\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)+2f(2)=\frac{1}{2}.$ Ako uvrstimo smjenu $f(2)=u$ i $f\left(\frac{1}{2}\right)=v$ dobijamo sistem od dvije jednačine sa dvije nepoznate. Rješavanjem tog sistema, dobijamo da je $u=0,$ tj. $f(2)=0.$

2) Data jednačina se transformiše u $9x^2+6x+1+16y^2-24y+9=0,$ tj u $(3x+1)^2+(4y-3)^2=0.$ Ovo je moguće jedino ako je $3x+1=0$ i $4y-3=0,$ tj. ako je $x=-\frac{1}{3}$ i $y=\frac{3}{4}.$

**Vesna Matković, Sanja Popović, Miloš Gojačanin,**
**Aleksandra Čejović, JU OŠ „Drago Milović“, Tivat**

## Imena učenika koji su uspješno riješili nagradni zadatak iz prošlog broja i koji će dobiti besplatni primjerak **Dijagonale 7**

1. Petar Ognjanović, JU OŠ „Dobrislav Đedo Perunović”, Bogetići
2. Tijana Kasalica, VII-1 JU OŠ „Vlado Milić”, Podgorica
3. Miloš Vidaković, VI-C JU OŠ „Štampar Makarije”, Podgorica
4. Anastasija Mandić, VII-2 JU OŠ „Luka Simonović”, Nikšić
5. Ivana Kovačević, VII-4, JU OŠ „Vuk Karadžić”, Berane

## PRIPREMA ZA ČAS

| | |
|---|---|
| **Škola** | JU OŠ „Milija Nikčević“, Nikšić |
| **Predmet** | Matematika |
| **Razred** | VIII |
| **Pojmovi** | Linearne nejednačine |
| **Obrazovno-vaspitni ishod učenja:** | Tokom učenja učenici će koristiti osnovna svojstva nejednakosti pri rješavanju linearnih nejednačina. |
| **Oblici rada** | – grupni rad<br>– frontalni rad |
| **Nastavne metode** | – monološko-dijaloška<br>– demonstrativna |
| **Nastavna sredstva** | – nastavni listići<br>– hamer papir |
| **Nastavnice** | **Jasna Todorović i Ljiljana Vučić** |

### Uvodni dio časa (10 min)

– Nastavnica dijeli učenike u 5 grupa, dodjeljujući im redom brojeve od 1 do 5. Svi kojima je dodijeljen broj 1 čine prvu grupu, kojima je dodijeljen broj 2 drugu grupu, i dalje isto važi i za preostala 3 broja tj. tri grupe.

– Obnavljanje o ekvivalentnim (ne)jednačinama:

1. Šta su to ekvivalentne jednačine?
2. Šta su to ekvivalentne nejednačine?
3. Koja su pravila formiranja ekvivalentnih jednačina tj. nejednačina?
4. Objasniti pravila formiranja ekvivalentnih nejednačina.
5. Da li postoje nejednačine koje nemaju rješenja? Ako je potvrdan odgovor - navesti primjer.

### Glavni dio časa (30 min)

– Učenici dobijaju nastavni listić sa zadacima za svoju grupu i timski rade zadatke. Ukoliko je potrebno, pitaju za dodatna pojašnjenja nastavnicu/ka.

– Kada su riješeni zadaci, na dobijenom hameru ispisuju zadatke svoje grupe sa postupkom rješavanja i prikazanim skupom rješenja na koordinatnoj osi. Pišu krupnije kako bi bilo vidljivo ostalim učenicima kada budu prezentovali svoj rad. Grupa sama bira svog predstavnika. (12 min)

– Svaka grupa prezentuje svoj rad pred tablom. Dok jedna grupa prezentuje ostale grupe zapisuju, komentarišu i traže pojašnjenja ukoliko je potrebno. (18 min)

## Grupa 1

1) Da li su sljedeće nejednačine ekvivalentne:
   a) $12x > -48$ i $x > -4$, b) $-8 \geq 7 - x$ i $x \geq -15$ ?

2) Riješiti nejednačinu:

   a) $-3(x+1) > 2x - 13$, b) $x^2 - 2x + 7 < (x-3)(x+3)$

   i na koordinatnoj osi prikazati skup njenih rješenja.

## Grupa 2

1) Koji od brojeva $-6$, $-2$, $0$ i $2$ pripada skupu rješenja nejednačine $3 \leq 2x + 5$?

2) Riješiti nejednačinu: a) $4 - 8(x-1) + 3 \geq 7 - 5x$,

   b) $x^2 + 5x - 7 < (x+3)^2$
   i na koordinatnoj osi prikazati skup njenih rješenja.

## Grupa 3

1) Riješiti nejednačine: a) $0 \cdot x > -10$ b) $0 \cdot x < -15$.
2) Riješiti nejednačinu: a) $2(x-2) + 3 < x - 2$,
   b) $(2x-3)(2x+3) \geq (2x+5)^2$

   i na koordinatnoj osi prikazati skup njenih rješenja.

## Grupa 4

1) Riješiti nejednačine: a) $0 \cdot x > -100$ b) $0 \cdot x \leq 100$.

2) Riješiti nejednačinu: a) $\frac{x}{5} - 1 > 0$, b) $\frac{x-5}{3} - \frac{3-2x}{3} \geq \frac{x-3}{6} - \frac{1}{2}$
   i na koordinatnoj osi prikazati skup njenih rješenja.

## Grupa 5

1) Riješiti nejednačine: a) $0 \cdot x > -50$ b) $0 \cdot x \leq 0$
2) Riješiti nejednačine: a) $\frac{3}{5} - \frac{1}{2}x > 1$, b) $\frac{5-x}{2} - 1 < \frac{1+5x}{4} - 2$
   i na koordinatnoj osi prikazati skup njenih rješenja.

### Završni dio časa (5 min)

– Učenici zapisuju domaći zadatak: Zbirka zadataka, zadaci...

Dr Radoje Šćepanović

# MATEMATIČKO MODELIRANJE
## Zadaci o kretanju objekata

Da li ste se zapitali zašto naši učenici na PISA testiranju iz matematike pokazuju slabe rezultate? Razlog nije u znanju matematičkih vještina, već u sposobnosti učenika da matematička znanja primijene u rješavanju svakodnevnih situacija. Drugim riječima, naša škola daje dovoljno teorijskih matematičkih znanja, ali učenike u školi malo, bolje reći nedovoljno, učimo da ta znanja primijene u praksi. To je i razlog što se naš školski sistem mijenja sa naglaskom na razvijanje matematičkih kompetencija. Šta se podrazumijeva pod matematičkom kompetencijom? To je sposobnost učenika da razvija i primjenjuje matematičko znanje s ciljem rješavanja niza problema u svakodnevnim situacijama. Dakle, cilj je učenika osposobiti da bude rješavač problema kako bi se mogao uspješno nositi sa izazovima u svakodnevnom životu i sjutra na radnom mjestu. U prilog ovom zahtjevu su i članak o rješavanju tekstualnih zadataka (Dijagonala 5), kao i članak koji slijedi. Kako rješavati situacije sa kretanjem objekata (ljudi, automobila, čamaca, vozova, brodova...) po rijekama i mirnim vodama. Pretpostavljamo da su sva ta kretanja ravnomjerna, tj. da je njihova brzina kretanja konstantna.

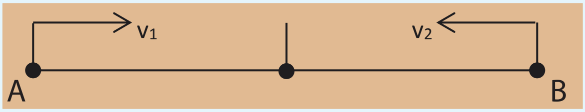
Uvedimo oznake:

- $s$ - pređeni put u kilometrima (km), metrima (m),
- $t$ - vrijeme u časovima (h), minutama (min), sekundama (sec),
- $v$ - brzina u kilometrima na čas (km/h), kilometrima u minuti (km/min), metrima u minuti (m/min), metrima u sekundi (m/sec).

Takođe, dogovorimo se da brzinu, kojom se približavaju objekti jedan drugom označavamo sa $v_p$, a brzinu kojom se objekti udaljavaju jedan od drugog sa $v_u$.

Razmotrićemo četiri slučaja.

**1) Kretanje objekata u susret jednog prema drugom**.




Ovo kretanje se može grafički prikazati na sljedeći način (vidi sliku). Objekti kreću iz tačaka A i B u susret jedan drugom. Tada je brzina njihovog približavanja jednaka zbiru brzina objekata, tj.

$$v_p = v_1 + v_2.$$

Rastojanje koje su prošli objekti nalazi se po formuli

$$s = (v_1 + v_2)t,$$

a vrijeme

$$t = \frac{s}{v_1 + v_2}.$$

Ako je dato rastojanje koje su prešla oba objekta do njihovog susreta ($s$) i jedna od brzina ($v_1$), tada je

$$v_2 = v_p - v_1, \; v_p = \frac{s}{t}.$$

**Primjer 1**. Iz mjesta A u mjesto B istovremeno su krenuli dvojica turista, jedan pješke drugi biciklom. U isto vrijeme iz mjesta B u mjesto A krenuo je motociklista, koji se sreo sa biciklistom poslije 2 h vožnje, a sa pješakom poslije 2,5 h vožnje. Odrediti rastojanje između mjesta A i B i brzinu kretanja motocikliste, znajući da se pješak kreće brzinom 4 km/h, a biciklista 10 km/h.

**Rješenje:** Označimo sa $s$ rastojanje između mjesta A i B, a sa $v$ brzinu kretanja motocikliste. Brzina približavanja pješaka i motocikliste je $4+v$, a bicikliste i motocikliste je $10 + v$. Slijedi, $s = 2{,}5 \cdot (4 + v) = 2 \cdot (10 + v)$, odnosno $v = 20$ km/h i $s = 60$ km.

**Zadatak 1**. Iz mjesta A u mjesto B kreće taksista brzinom 50 km/h, a iz mjesta B u mjesto A, u isto vrijeme, kreće drugi taksista brzinom 60 km/h. Ako je rastojanje između mjesta A i B jednako 330 km, koliko će rastojanje biti između taksista poslije 2 h vožnje? Poslije koliko sati vožnje će se taksisti sresti?

**Rješenje:** Rastojanje između taksista će biti 110 km, srešće se poslije 3 h vožnje.

**Zadatak 2**. Rastojanje između dva grada je 265 km. Iz grada A u grad B pošao je autobus brzinom 65 km/h. Kroz 2 sata u susret njemu iz mjesta B u mjesto A pošao je drugi autobus brzinom 70 km/h. Kroz koliko časova će se ovi autobusi sresti?

**Rješenje:** 3 h. Uputstvo: $65t + 75(t - 2) = 265$.

**Primjer 2**. Iz sela A u selo B pošli su, istovremeno, automobilista i biciklista. Rastojanje među selima je 50 km. Brzina automobiliste je 40 km/h veća od brzine bicikliste. Biciklista je u putu proveo 4 h duže nego automobilista. Odrediti brzinu bicikliste.

**Rješenje:** 10 km/h. Uputstvo: Označimo sa $v$ brzinu bicikliste, a sa $t$ vrijeme koje je proveo automobilista u vožnji. Tada je $(v + 40)$ km/h brzina automobiliste, a $(t + 4)$ h vrijeme koje je biciklista proveo u vožnji. Tada je: $(t + 4)v = t(v + 40) = 50$, $\frac{50}{v+40} = \frac{50-4v}{v}$, $v^2 + 40v - 500 = 0$, $(v+20)^2 = 900$, $v + 20 = 30$, $v = 10$ km/h.

## 2) Kretanje objekata u istom smjeru

Razmotrimo dva tipa zadataka o kretanju u istom smjeru.

**I tip**: $v_1 > v_2$ (vidi sliku).


Tada je brzina približavanja objekata jednaka $v_p = v_1 - v_2$,

rastojanje između objekata $s = v_p t$,

a vrijeme približavanja $t = \frac{s}{v_p}$.

**II tip:** $v_1 < v_2$ (vidi sliku).


Tada je brzina udaljavanja objekata jednaka

$$v_u = v_2 - v_1,$$

rastojanje između objekata

$$s = v_u t,$$

a vrijeme približavanja $t = \frac{s}{v_u}$.

**Napomena**: Ako je $v_1 = v_2$, tada je rastojanje među objektima stalno (ne mijenja se). Ako je $v_1 > v_2$, tada se rastojanje među objektima smanjuje, a ako je $v_2 < v_1$, tada se rastojanje među objektima uvećava.

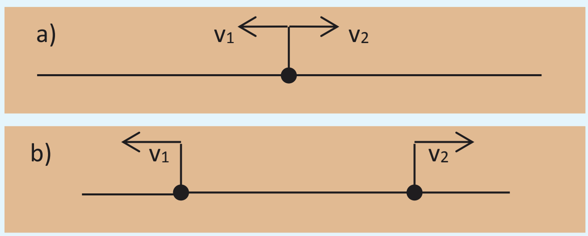
**Zadatak 3**. Iz dva sela, između kojih je rastojanje 36 km, krenuli su u istom smjeru motociklista i biciklista. Brzina bicikliste je 12 km/h, a motocikliste 30 km/h. Kroz koliko časova će motociklista stići biciklistu (pretpostavlja se da motociklista ide za biciklistom)?
**Rješenje:** 2 h. Uputstvo: Brzina kojom motociklista sustiže biciklistu je 18 km/h (30 – 12 = 18); $t = \frac{s}{v_0} = \frac{36}{18} = 2$ h.

### 3) Kretanje objekata u različitim smjerovima

Brzina kojom se objekti udaljavaju jedan od drugog je

$$v_u = v_1 + v_2.$$

Rastojanje između objekata




$$s = (v_1 + v_2)\cdot t \text{ (slučaj a)},$$

$$s = s_{AB} + (v_1 + v_2)\cdot t$$
(slučaj b).

Dalje je

$$v_u = \frac{s}{t} \text{ (slučaj a)},$$

$$v_u = \frac{s - s_{AB}}{t} \text{ (slučaj b)},$$

$$t = \frac{s}{v_u}.$$

**Zadatak 4**. Dva pješaka su istovremeno krenula u suprotnim smjerovima iz istog mjesta. Brzina prvog je 4 km/h a drugog 5 km/h. Koliko će biti rastojanje među njima poslije 3 h pješačenja?

**Rješenje:** 27 km. Uputstvo: Brzina udaljavanja pješaka je 9 km/h.

**Zadatak 5**. Dva voza su krenula istovremeno iz stanica, među kojima je rastojanje 45 km, u suprotnim smjerovima. Njihove brzine su 50 km/h i 70 km/h. Poslije koliko časova će među njima biti rastojanje 285 km?

**Rješenje:** 2 h. Uputstvo. Brzina udaljavanja vozova je 120 km/h.

4) **Kretanje tijela po rijeci i jezeru (moru).**

Brzinu motornog čamca po vodenim površinama koje miruju (jezero, more,...) nazivamo sopstvena brzina (čamca). Sopstvena brzina splava na mirnim vodenim površinama jednaka je 0 km/h. Brzina kretanja čamca po tekućim vodama, na primjer rijekama, zavisi od toga da li se čamac kreće nizvodno (u smjeru toka rijeke) ili uzvodno (u smjeru suprotnom toku rijeke). Ako sa $v_s$ označimo sopstvenu brzinu čamca, a sa $v_r$ brzinu toka rijeke, tada će brzina $v$ kretanja čamca po rijeci biti jednaka:

$v = v_s + v_r$ nizvodno, $\quad$ $v = v_s - v_r$ uzvodno.

Rastojanje $s$ koje pređe čamac za vrijeme $t$:

$s = (v_s + v_r)t$ nizvodno, $\quad$ $s = (v_s - v_r)t$ uzvodno.

Uočimo da čamac koji ne pokreće motor (na primjer splav) ima brzinu jednaku brzini toka rijeke i može se kretati samo nizvodno.

**Primjer 3**. Brod je prvo plovio nizvodno 120 km, a zatim se vratio u polaznu stanicu. Za povratak mu je bio potreban 1h više nego za odlazak. Ako je sopstvena brzina broda 27 km/h, odrediti brzinu toka rijeke.

**Rješenje:** Označimo sa $v_r$ brzinu toka rijeke i sa $t$ vrijeme nizvodne plovidbe.

Tada je $(27 + v_r)t = 120$ i

$(27 - v_r)(t + 1) = 120$. Odavde slijedi da je $t = \dfrac{120}{27+v_r}$ i $t = \dfrac{120}{27-v_r} - 1$, odnosno

$\dfrac{120}{27+v_r} = \dfrac{120}{27-v_r} - 1$, tj. $v_r^2 + 240v_r - 729 = 0$. Ovo je kvadratna jednačina, o njoj se uči u drugom razredu srednje škole. Mi ćemo je ipak riješiti na vama prihvatljiv način. Zapišimo je u obliku $(v_r + 120)^2 - 14400 - 729 = 0$, odnosno u obliku $(v_r + 120)^2 = 123^2 \ (= 15129)$. Dalje je $v_r + 120 = \pm 123$ , tj. $v_r = 3$ km/h.

Drugo rješenje $v_r = -243$ nije moguće, jer brzina ne može biti negativna.

**Zadatak 6**. Aleksin čamac ima sopstvenu brzinu 8 km/h. On treba da pređe 20 km za 2 h da bi stigao na zakazani sastanak ploveći nizvodno. Kolika mora biti najmanja brzina toka rijeke da bi Aleksa stigao na sastanak?

**Rješenje:** Označimo sa $v_r$ brzinu toka rijeke. Tada mora biti $(8 + v_r)\cdot 2 \geq 20$, tj. $v_r \geq 2$ km/h.

**Zadatak 7.** Čamac je plovio 30 km nizvodno, a zatim još 6 km uzvodno. Putovanje je trajalo 3 h. Odrediti sopstvenu brzinu čamca ako je brzina toka rijeke 2 km/h.

**Rješenje:** 14 km/h. Uputstvo: Iz sistema jednačina treba odrediti $v_s$

$$t_1 = \frac{40}{v_s + 2} \quad \text{i} \quad t_2 = \frac{6}{v_s - 2}, \quad t_1 + t_2 = 3.$$

**Zadatak 8.** Čamac je prvo plovio nizvodno 15 km, zatim uzvodno 13 km. Ukupno putovanje je trajalo 4 sata. Kolika je srednja brzina čamca?

**Rješenje:** 7 km/h. Uputstvo: Podsjetimo se: Srednja brzina se izračunava kada se pređeni put podijeli sa vremenom provedenim na tome putu.

Evo još nekoliko zadataka vezanih za kretanje vozova.

**Zadatak 9.** Voz se kreće ravnomjerno brzinom 60 km/h, prolazi pored stuba za 30 sec. Odrediti dužinu voza u metrima.

**Rješenje:** 500 metara. Uputstvo: Znajući brzinu kretanja $v$ = 60 km/h = 1000 m/min i vrijeme prolaska pored stuba $t$ = 30 sec = 0,5 minuta, možemo odrediti dužinu voza kao rastojanje $L = vt$ = 500 m.

**Zadatak 10.** Voz se kreće ravnomjerno brzinom 90 km/h. Za 1 minutu voz prolazi pored šumskog pojasa dužine 800 m. Odrediti dužinu voza u metrima.

**Rješenje:** 700 metara. Uputstvo: Znajući brzinu kretanja v = 90 km/h = 1500 m/min i vrijeme prolaska pored šume $t$ = 1 minut, možemo odrediti dužinu voza kao rastojanje $S = vt$ = 1500 m umanjeno za dužinu šumskog pojasa:
$L = S$ – 800 m = 700 m.

**Zadatak 11.** Voz prelazi most dužine 450 m za 45 sec, a pored čovjeka koji stoji na početku mosta za 15 sec. Odrediti dužinu voza i njegovu brzinu.

**Rješenje**: Dužina voza 225 m, brzina 15 m/s. Uputstvo: Neka je brzina voza $v$ (m/sec). Tada je dužina voza $L = 15v$ (m). Za 45 sec voz prelazi rastojanje $45v$ ili što je isto $(450 + 15v)$ (u m). Ostaje da se riješi jednačina
$45v = 450 + 15v$.

**Rješenje zadatka sa naslovne strane Dijagonale 6:**

**A · B · AB = BBB**

**A = 3, B = 7**

# ZANIMLJIVOSTI O BROJEVIMA

## NEOBIČNI BROJEVI

Brojevi **blizanci** su prosti brojevi koji se razlikuju za 2 (prirodan broj n je prost ako su jedini njegovi djelioci 1 i n). Dakle, brojevi blizanci su uređeni parovi prostih brojeva oblika (n, n + 2). Brojevi blizanci su: 3 i 5, 5 i 7, 11 i 13, itd. Isto kao i proste brojeve i brojeve blizance možemo tražiti pomoću Eratostenovog sita. Na taj način pronalazimo 8 parova brojeva blizanaca koji su manji od 100. Nije poznato da li brojeva blizanaca ima konačno ili beskonačno mnogo. Do sada najveći otkriveni brojevi blizanci imaju po 2 259 cifara (otkrili Dabner, otac i sin, 1985. godine).

Za brojeve kažemo da su **prijateljski** ako su im jednaki zbirovi svih pravih djelilaca (u prave djelioce broja n ne uključujemo broj n). Prvi su ove brojeve proučavali Pitagorejci. Oni su otkrili samo jedan par prijateljskih brojeva i to 220 i 284. Pravi djelioci broja 220 su: 1, 2, 4, 5, 10, 22, 44, 55 i 110. Njihov zbir je 284. S druge strane zbir pravih djelilaca broja 284 je takođe 284, jer su pravi djelioci ovog broja: 1, 2, 4, 71 i 142. Kako su im zbirovi pravih djelilaca jednaki to su brojevi 220 i 284 prijateljski brojevi.

Mnogi matematičari su proučavali prijateljske brojeve. Ojler je otkrio 61 par prijateljskih brojeva. Ferma je recimo utvrdio da su prijateljski brojevi 17296 i 18416. Dekart je otkrio jedan par prijateljskih brojeva i to 9363584 i 9437056. Sada se prijateljski brojevi otkrivaju pomoću kompjutera, no i dalje nije poznato koliko ima ovih brojeva. Dva prijateljska broja su ili oba parna ili oba neparna, jer do sada nije otkriven nijedan par prijateljskih brojeva od kojih je jedan paran, a drugi neparan. S druge strane, poznato je da prijateljski brojevi koji su do sada otkriveni nijesu djeljivi sa 3.

Parovi prostih brojeva oblika ($n^2 - 2$, $n^2 + 2$) su **sijamski** prosti brojevi. Naziv potiče iz činjenice da se ovi brojevi rjedje pojavljuju od brojeva blizanaca. Sijamski prosti brojevi su 7 i 11 jer za n = 3 imamo da je (7,11) = ($n^2 - 2$, $n^2 + 2$).

Među prostim brojevima postoje i brojevi **rođaci** a to su prosti brojevi koji se razlikuju za 4. Do 100 imamo 8 parova rodjačkih brojeva i to: (3,7), (7,11), (13,17), (19,23), (37,41), (43,47), (67,71) i (79,83).

Ako iz niza prirodnih brojeva izbacimo sve parne brojeve, a zatim se iz dobijenog niza izbaci svaki treći, zatim iz niza brojeva koji je ostao izbacimo svaki sedmi broj, itd..., dobijamo niz: 1, 3, 7, 9, 13, 15, 21, 25, 31, 33, 37, 43, 49, 51, 63, 67, 69, 73, 75, 87, 93, 99,... Ovo je niz **sretnih** brojeva jer su dati brojevi imali sreću da nakon navedenih eliminacija, ostanu. Zanimljivo je otkriće Kristijana Goldbaha koji je pretpostavio da svaki paran broj je zbir dva sretna broja. Recimo 2 = 1 + 1, 4 = 1 + 3,...

U matematici osim sretnih postoji i **radosni** ili **veseli** brojevi. Ako za prvog člana izaberete proizvoljan prirodni broj, a svaki naredni član niza dobijate kao zbir kvadrata cifara prethodnog broja, formirali ste radostan niz. Ako se na kraju tog niza dobije broj 1, onda su članovi tog niza radosni ili veseli brojevi. Radosni brojevi su: 1, 7, 10, 13, 19, 23, 28, 31,... Recimo, 7 je radostan ili veseo broj jer obrazuje radostan niz: 7, 49, 97, 130, 10, 1. Preciznije 7 je prvi član, drugi je 49 kao kvadrat broja 7, slijedi 97 kao zbir $4^2 + 9^2$, zatim $130 = 9^2 + 7^2$, pa $10 = 1^2 + 3^2 + 0^2$ i na kraju $1 = 1^2 + 0^2$.

Ljudi nekada nijesu brojali kako mi danas brojimo i nisu poznavali puno vrsta brojeva. Danas se brojevi itekako izučavaju i to pogotovo zahvaljujući kompjuterima. Svijet brojeva je interesantan, a ova priča je samo dio tog čarobnog dijela matematike.

**Danijela Jovanović,**
**Osnovna škola „Milorad Musa Burzan“ Podgorica**

## VEDSKA MATEMATIKA – MAGIJA ILI STVARNOST?

Matematičke oblasti u toku školovanja nekada nude „suvoparne“ lekcije i zadatke istog tipa pa se često desi da učenici nemaju isti nivo interesovanja za sve oblasti. Primijenjena matematika koja podrazumijeva primjere iz svakodnevnog života svakako dođe kao osvježenje u tim trenucima. Takođe, kombinatorika koja zahtijeva logički pristup, zadatke nudi u vidu igara i pravila prebrojavanja. To može zainteresovati učenike u svim razredima, međutim postoji još nešto, a to je vedska matematika.

Vedska matematika je stara više hiljada godina, a tek poslednjih stotinjak je interesantna zapadnim civilizacijama. Cilj svakog učenika je da što brže dođe do rezultata i da pritom bude siguran da je on tačan. Upravo nam vedska matematika nudi tu mogućnost i to u svega nekoliko sekundi! Prvi susret na nas ostavlja jak utisak, nakon početnih istraživanja sve smo bliži zaključku da se radi o nečemu toliko nestvarnom, možemo reći magičnom. Često se u literaturi može sresti naziv sveta geometrija ili čarobni kvadrat.

Istorijski gledano, nastala je u Indiji i razvijala se hiljadama godina. Interesantno je da su spisi, vede, po kojima je dobila ime zapravo pisane na sanskritu, u obliku stiha. To joj je omogućilo da hiljadama godina bude tajna za sve druge civilizacije. Vede su prenošene kroz vjekove usmenim putem što je zahtijevalo veliku posvećenost i moždanu aktivnost samih aktera. Znamo da ljudi prije više hiljada godina nisu imali pomagala, a ostvarili su neka i danas nedostižna djela, kao na primjer u građevinarstvu. Možda odgovor na pitanje kako su sve to mogli leži upravo u vedskoj matematici. U vedama o građevinarstvu i arhitekturi pronađen je dio o matematici. Vedska matematika predstavlja jedan od oblika mentalne aritmetike koja do rezultata dolazi isključivo koristeći mozak. Da bi mogli koristiti ovaj sistem računanja potrebno je poznavati neke formule tj. sutre. Sutre su jednostavne sanskritske formule izražene riječima koje mogu riješiti mnoge poznate matematičke probleme u aritmetici, algebri, geometriji i diferencijalnom računu. U vedskoj matematici sve počiva na 16 sutri i 14 pomoćnih sutri. Svakako, prije nego što pobrojimo sve formule tj. sutre, zapitaćemo se zašto da u dobu računara i digitrona učimo neka opisna pravila za brže računanje? Odgovor leži u tome da mozak predstavlja mentalni mišić i da ga je kao i svaki drugi mišić potrebno trenirati. Ako npr. ulogu našeg mozga svedemo na upijanje informacija iz medija, čitav naš mentalni sklop atrofira tj. ne samo da se ne razvija nego i propada. Upravo vedska matematika omogućuje konstantno umrežavanje hemisfera mozga neuronskim vezama što za cilj ima harmoničniji razvoj čitavog mozga i napredak na polju inteligencije, koncentracije, logičkog razmišljanja itd.

**GLAVNE SUTRE:**

1. Za jedan više od prethodnog (By one more than the one before)
2. Sve od 9 i zadnji od 10 (All from 9 and the last from 10)
3. Vertikalno i dijagonalno (Vertically and Cross-wise)
4. Prenijeti i upotrijebiti (Transpose and Apply)
5. Ako je Samuccaya jednaka, onda je nula (If the Samuccaya is the Same it is Zero)
6. Ako je Jedan u količniku, Drugi je nula (If One is in Ratio the Other is Zero)
7. Pomoću sabiranja i pomoću oduzimanja (By Addition and by Subtraction)

8. Pomoću dovršenja i pomoću ne-dovršenja (By the Completion or Non-Completion)
9. Diferencijalni račun (Differential Calculus)
10. Pomoću nedostatka (By the Deficiency)
11. Specifično i opšte (Specific and General)
12. Ostaci pomoću posljednje cifre (The Remainders by the Last Digit)
13. Zadnji i dvaput predzadnji (The Ultimate and Twice thePenultimate)
14. Za jedan manje od prethodnog (By One Less than the One Before)
15. Proizvod zbira (The Product of the Sum)
16. Svi množitelji (All the Multipliers)

**POMOĆNE SUTRE**

1. Proporcionalno (Proportionately)
2. Ostatak ostaje konstantan (The Remainder Remains Constant)
3. Prvi sa prvim i zadnji sa zadnjim (The First by the First and the Last by the Last)
4. Za 7 množitelj je 143 (For 7 the Multiplicand is 143)
5. Pomoću dodira u više tačaka (By Osculation)
6. Smanjivanje pomoću nedostatka (Lessen by the Deficiency)
7. Kako god se nedostatak smanjuje tom veličinom i postavlja kvadrat nedostatka (Whatever the Deficiency lessen by that amount and set up the Square of the Deficiency)
8. Posljednji sumira 10 (Last Totalling 10)
9. Samo posljednji pojmovi (Only the Last Terms)
10. Zbir proizvoda (The Sum of the Products)
11. Pomoću promjene eliminacije i zadržavanja (By Alternative Elimination and Retention)
12. Pomoću pukog posmatranja (By Mere Observation)
13. Proizvod zbira je zbir proizvoda (The Product of the Sum is the Sum of the Products)
14. Na zastavi (On the Flag)

Moć ovih sutri leži u tome da zapise od više desetina redova prilikom rješavanja nekog matematičkog problema možemo svesti na svega nekoliko redova i nekoliko sekundi računa. Najnevjerovatni podatak u čitavoj priči je Ginisov rekorder u brzom računanju Shakuntala Devi (1929-2013) nazvana "ljudski kompjuter". Ona je 1980. godine proizvod dva trinaestocifrena broja odabrana slučajno na Imperial koledžu u Londonu izračunala za svega 28 sekundi! Pomnožila je:

7.686.369.774.870 x 2.465.099.745.779 =
= 18.947.668.177.995.426.426.773.730

Zadivljujuće je kako sve funkcioniše i kako je neko prije toliko hiljada godina sve to otkrio.

Primjeri koje smo pripremili predstavljaju jednostavnije oblike koji za cilj imaju shvatanje suštine rada pojedinih sutri, a na čitaocu je da pokuša ista pravila primjeniti na složenijim primjerima i istraživati ostale sutre!

**1. Za jedan veći od prethodnog**

Brzo kvadriranje brojeva koji se završavaju sa $\mathbf{5}$ : $\mathbf{75^2 = 5625}$

Odgovor se sastoji od dva dijela: $\mathbf{56}$ i $\mathbf{25}$. Poslednje dvije cifre su uvijek $\mathbf{25}$ kao $\mathbf{5^2}$. Za prve dvije važi pravilo za jedan veći od prethodnog tj broj $\mathbf{7}$ će biti pomnožen za jedan većim brojem, odnosno sa $\mathbf{8}$ $(\mathbf{7 * 8 = 56})$Provjeriti da li važi za brojeve $\mathbf{45^2, 65^2, 95^2}$ .

**2. Sve od 9 i zadnji od 10**

Oduzimanje od **1.000** ili drugih dekadnih jedinica:

$\mathbf{1.000 - 347\ =}$

$\mathbf{9 - 3\ =\ 6}$

$\mathbf{9 - 4\ =\ 5}$

$\mathbf{10\ - 7 =\ 3}$

$\mathbf{=\ 653}$

Provjeriti sljedeće primjere:

$\mathbf{1.000 - 245\ =}$

$\mathbf{1.000 - 765\ =}$

$\mathbf{10.000 - 859\ =\ \dots}$

**3.Vertikalno i dijagonalno**

Množenje brojeva koji su blizu deseticama: $\mathbf{8\ x\ 7}\ = ?$

Od **8** do **10** je potrebno **2**,
od **7** do **10** je potrebno **3**:

**8 2 8 – 3 ili 7 – 2 = 5**
**7 3 3 X 2 = 6**
**56**

$\mathbf{981\ x\ 990}\ = ?$

**981 19**
**- x**
**990 10**
**971 190**

**98 x 72 = ?**

Od **98** do **100** je **2**, od **72** do **100** je **28**:

**98 2 98 – 28 ili 72 – 2 = 70**
**-x**
**72 28 28 X 2 = 56**
**70 56 = 7.056**

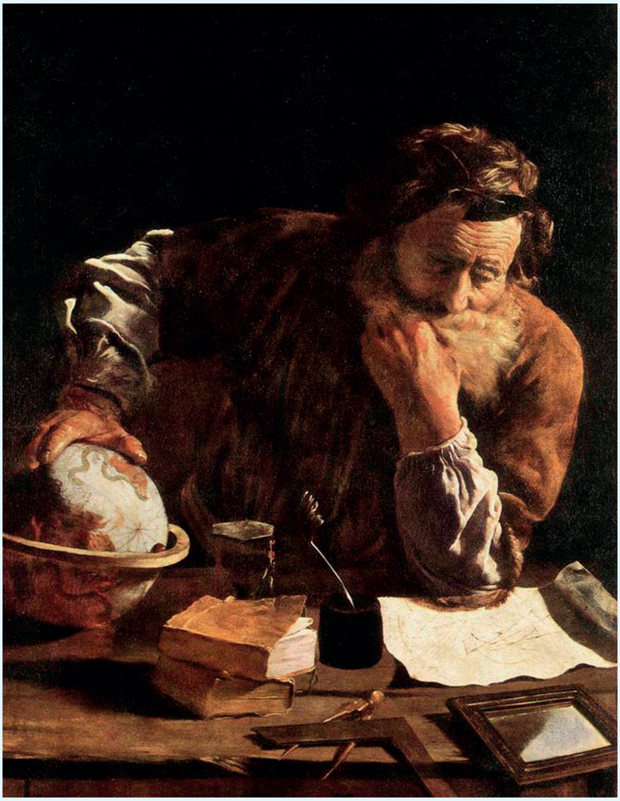
Izračunati:

**9841 x 9995 =**

**9987 x 9999 =**

**Nikola Radojičić, JU OŠ „Milija Nikčević“, Nikšić**

# ARHIMED



**Arhimed** je bio starogrčki matematičar, fizičar i astronom. Danas se smatra da je bio najveći matematičar antike i uz Njutna **jedan od dvojice najvećih umova svih vremena**. Rodio se 287. godine prije nove ere u Sirakuzi (na ostrvu Sicilija, Italija). Podstaknut znanjem svog oca Fidija, koji je inače bio astronom i matematičar, Arhimed je išao kroz život uvijek iznova tragajući za novim znanjem. Njegov duh tražio je učenje koje mu niko nije mogao pružiti u Sirakuzi. Zato Arhimed kreće na školovanje u Aleksandriju, tadašnji kulturni i naučni centar svijeta. Radeći u Aleksandrijskoj biblioteci, koja je tada bila najveća riznica knjiga na svijetu, Arhimed je izučio i usavršio mnoga znanja iz različitih oblasti nauke. Njega je najviše zanimala matematika. Često je, utonut u naučne misli, zaboravljao prilike u kojima je radio, pa i na samo jelo. „*Heureka! Heureka!*“ – „Našao sam!“, uzviknuo je Arhimed kada je, sjedeći u kupatilu, otkrio fizički zakon da svako tijelo potopljeno u tečnost, gubi od svoje težine onoliko kolika je težina njime istisnute tečnosti (ili gasa). Taj gubitak je, u stvari, potisak tečnosti ili gasa.

Vrativši se u Sirakuzu, Arhimed se u početku bavio astronomijom. Napadnuta Rimljanima, Sirakuza nije dugo mogla uživati svoju slobodu, te je stoga Arhimed učestvovao u odbrani svoga grada kako je znao i umio. Mnoge legende govore o njegovim izumima koje je konstruisao u tu svrhu. Priča kaže da je konstruisao pokretne platforme – katapulte za ispuštanje teškog kamenja i ključalog materijala na neprijateljske brodove, ukoliko bi se suviše približili gradskim zidinama. Takođe je zabilježeno da je Arhimed konstruisao paleće ogledalo u obliku paraboloida pomoću koga su paljeni neprijateljski brodovi. Uz pomoć znanja iz fizike i matematike moguće je izračunati da je dužina *latus rectum* (prave linije koja prolazi kroz žižu ortogonalno na osu) jednaka parametru $p$ u jednačini parabole $y^2 = px$. Kako se žiža parabole $y^2 = px$ nalazi u tački ($p/4$, 0), pod pretpostavkom da se neprijateljski brod nalazi na 50 metara od gradskih zidina i da je smješten tačno u žižu Arhimedovog ogledala, dakle, na $p/4 = 50$ metara, ispada da bi prečnik ogledala morao da iznosi 200 metara. Izvesno je da u to vreme (a ni danas) nije bilo moguće napraviti ogledalo ovih razmjera.

Arhimed je najveću slavu stekao svojim raspravama o zaobljenim geometrijskim tijelima. Izračunao je obim i površinu kruga, površinu i zapreminu lopte i valjka, površinu odsječka parabole, obim kugle, površinu elipse, itd. Pritom se služio metodama kojima se danas služimo u diferencijalnom i integralnom računu, tako da se njegovi radovi mogu smatrati pretečom integralnog računa. Našao je način za pisanje vrlo velikih brojeva pomoću stepena. Pokazao je kako se matematika može primijeniti na fiziku i mehaniku, otkrivši zakone poluge, uzgona (tzv. Arhimedov zakon), određivanje težišta, izumio vijak, unaprijedio statiku, postavio osnove hidrostatike i odredio približnu vrijednost broja $\pi$.

Ovaj veliki matematičar bio je vrstan polemičar ali i samokritičar. Na jednom mjestu, kritikujći neke svoje radove i greške, Arhimed piše: *Neka to bude zastrašujući primjer kako se ljudi koji tvrde da tobože znaju da dokažu sve ono što predlažu drugima, a ne prilažu vlastita rješenja, moraju se na kraju krajeva uvjeriti kako su se latili da dokažu ono što nije moguće dokazati.*

Podjednako je bio uspješan kako u teorijskom tako i u praktičnom radu, kao i u njihovom povezivanju. Sačuvana su njegova djela**:** *O sferi i cilindru, Mjerenje kruga, O konoidima i sferoidima, O spiralama, Kvadratura parabole, O ravnoteži ravnih likova, O plivajućim tijelima.*

Arhimeda je ubio rimski vojnik 212. godine prije nove ere u Sirakuzi. Legenda kaže da ga je vojnik zatekao kako u pijesku rješava neki geometrijski problem crtajući krugove, naredivši mu da pođe s njim. Arhimed mu je, u ***žaru*** traganja za rješenjem odgovorio: „Ne diraj moje krugove“, na šta je vojnik, ne razumjevši ***šta*** mu je Arhimed rekao, isukao mač i ubio ga. Legenda kaže da mu je na nadgrobnoj ploči bio crtež sfere u koju je upisan valjak.

**Teodora Vuković i Andrea Mrdović,**
učenice gimnazije ,,Slobodan Škerović“,
odjeljenje matematičke gimnazije

**ŠTAMPANJE OVOG BROJA POMOGLI SU:**

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO
CRNE GORE

MINISTARSTVO PROSVJETE
CRNE GORE

**HVALA NAŠIM PRIJATELJIMA!**

DOMEN d.o.o.
PODGORICA

BEMAX d.o.o.
PODGORICA

Uredništvo poziva nastavnike, učenike i sve čitaoce da nam šalju priloge za list: članke, odabrane zadatke, zanimljivosti, priloge za zabavnu matematiku itd.

Dio tiraža ovog broja „Dijagonale" će biti besplatno podijeljen svim bibliotekama osnovnih škola u Crnoj Gori.
Ovaj broj se može kupiti u „**Gradskoj knjižari**" i „**Narodnoj knjizi**".

Sve informacije o pretplati i porudžbini ovog i narednih brojeva možete naći na sajtu Udruženja. Narudžbe slati putem mejla.

Broj žiro računa UNMCG je **550-18240-71** kod Podgoričke banke.

Adresa redakcije je: Ul. Gojka Berkuljana br. 20, Podgorica.

Mejl: udruznastmatem@gmail.com

www.unmcgwordpress.com

CIP - Каталогизација у публикацији
Национална библиотека Црне Горе, Цетиње

ISSN 2536-5851 = Dijagonala
COBISS.CG-ID 36769808

ISSN 2536–5851

9 772536 585009 >