



Udruženje nastavnika matematike Crne Gore

Dijagonala

Matematički list za učenike osnovnih škola Cijena 1,50 €

„Matematičar koji nije pomalo i pjesnik
nikad neće biti savršen matematičar.“

(Vajerštras)

BROJ 10 - GODINA 2020.

Udruženje nastavnika matematike Crne Gore

Matematički list za učenike osnovnih škola – „Dijagonala“, broj 10

Godina 2020.

Cijena: 1,50 €

Glavni urednik:	<i>mr Radomir Božović</i>
Odgovorni urednik:	<i>Danijela Jovanović</i>
Redakcija:	<i>Prof. dr Žarko Pavićević, Prof. dr Radoje Šćepanović, Miodrag Lalić, Prof. dr Milenko Mosurović, Snežana Irić, Aleksandra Vuković, Vanja Đurđić Kuzmanović, Irena Pavićević, Nevena Ljujić</i>
Lektura:	<i>Milja Božović, prof.</i>
Korektura:	<i>Danijela Jovanović, prof.</i>
Priprema za štampu:	<i>Branko Gazdić</i>
Tiraž:	<i>1000</i>
Štampa:	<i>„Studio Branko“ d.o.o. – Podgorica</i>

Zavod za školstvo je odlukom broj 01 – 1214/2 od 03.09.2018. godine preporučio časopis „Dijagonala“ za korišćenje u osnovnim školama kao pomoćno nastavno sredstvo.

Sadržaj

Nulti korak u teoriji brojeva	3
Funkcije u programskom jeziku C++	7
Zadaci za vježbu	12
Odabrani zadaci	21
Takmičarski zadaci	22
Takmičarski zadaci iz prošlog broja	23
Priprema za čas	26
Matematika starog Egipta	30
Zanimljivi podaci	33
Rekli su o matematici	35

Проф. др Владимир Божовић

НУЛТИ КОРАК У ТЕОРИЈИ БРОЈЕВА

(Nastavak iz prethodnog broja Dijagonale)

Конгруенције – рачун остатака

Ако број z није дјелив бројем d , да ли је могуће неко правило дијелења таквих бројева у скупу цијелих бројева? На примјер, ако дијелимо број 17 са 3, јасно је да не постоји цио број q тако да је $17 = 3 \cdot q$. Међутим, знамо да 17 можемо подијелити са 3 и добити остатак

$$17 = 3 \cdot 5 + 2, \quad (1)$$

гдје је 5 количник, а 2 остатак. Неко ће, гледајући претходну једнакост упитати, зашто не би могли извршити дијелење са остатком у облику

$$17 = 3 \cdot 4 + 5? \quad (2)$$

Одговор је – у договору! Када говоримо о **дијелењу са остатком**, ДОГОВОРИЛИ смо се да остатак буде строго мањи од остатка. О томе говори и следеће тврђење.

Теорема 2: Нека су z и d цијели бројеви, при чему је $d \neq 0$. Тада постоје јединствени цијели бројеви, количник q и остатак r , такви да је

$$z = dq + rp, \quad 0 \leq r < |d|.$$

Из једнакости (1) и (2) видимо да количник и остатак се могу на различите начине исказати, али је то могуће само на један начин уз услов претходне теореме, да остатак r задовољава услов $0 \leq r < 3$.

Примјер 5: Нека је z произвољан цијели број. Могући остаци при дијелењу броја z бројем 5 су у скупу $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. У том смислу, сваки цијели број z може бити облика $5q, 5q + 1, 5q + 2, 5q + 3$ и $5q + 4$. Заправо, скуп цијелих бројева можемо представити као (дисјунктну) унију скупова

$$\mathbb{Z} = R_0 \cup R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4$$

гдје је $R_0 = \{\dots, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \dots\}$, $R_1 = \{\dots, -14, -9, -4, 1, 6, 11, \dots\}$, $R_2 = \{\dots, -13, -8, -3, 2, 7, 12, \dots\}$, $R_3 = \{\dots, -12, -7, -2, 3, 8, 13, \dots\}$ и $R_4 = \{\dots, -11, -6, -1, 4, 9, 14, \dots\}$. Ове скупове називамо **класе остатака по модулу 5**.

Посљедица 1: У односу на дијелење броја z ненултим бројем d , остатак r припада скупу $\{0, 1, 2, \dots, d - 1\}$.

Уводимо врло важан појам.

Дефиниција 4: За бројеве s и t кажемо да су **конгруентни по модулу n** , за $n \in \mathbb{N}$, уколико дају исти остатак при дијелењу са n . То записујемо:

$$s \equiv t \pmod{n}$$

Ако су s, t конгруентни по модулу n , онда

$$s = q_1n + r, \quad t = q_2n + r, \quad 0 \leq r < n.$$

Одавде слиједи да је $s - t = (q_1 - q_2)n$, што значи да $n \mid (s - t)$. Да ли важи обратно, односно, да ли из $n \mid (s - t)$ слиједи да $s \equiv t \pmod{n}$?

Нека је $s = q_1n + r_1$, а $t = q_2n + r_2$, за $0 \leq r_1 < n, 0 \leq r_2 < n$. Претпоставимо да је, не умањујући општост, $r_1 \geq r_2$. Онда је

$$s - t = n(q_1 - q_2) + r_1 - r_2.$$

Пошто n дијели лијеву страну претходне једнакости, дијели и десну. Пошто је $n(q_1 - q_2)$ очигледно дјеливо са n , онда и $r_1 - r_2$ мора бити дјеливо са n . Како је $0 \leq r_1 - r_2 \leq r_1 < n$, дакле $r_1 - r_2$ је строго мање од n . Отуд, $n \mid (r_1 - r_2)$ само ако је $r_1 - r_2 = 0$, односно $r_1 = r_2$. Тиме је доказано следеће тврђење.

Лема 3: Цијели бројеви s и t су конгруентни по модулу n ако и само ако $n \mid (s - t)$

$$s \equiv t \pmod{n} \text{ ако и само ако } n \mid (s - t).$$

Дакле, рачунање остатка броја s при дијелењу са неким датим бројем n је у принципу једноставан задатак. Треба „само“ подијелити та два броја и израчунати остатак r . А шта ако је $s = 2^{201} \cdot 23$, а $n = 5$? Јасно је да не можемо рачунати број s . Стога, потребно је да искористимо неки други приступ.

Посматрајмо класе остатака по модулу 5, дате у Примјеру 5. На примјер

$$17 \equiv 2 \pmod{5}, \quad -7 \equiv 3 \pmod{5}.$$

Којој класи остатака по модулу 5 припада $17 \cdot (-7)$? А којој $17 + (-5)$? Пошто је $17 \cdot (-7) = -119$, а $-119 = 5 \cdot 24 + 1$, јасно је да је

$$17 \cdot (-7) \equiv 1 \pmod{5}.$$

С друге стране, $2 \cdot 3 \equiv 1 \pmod{5}$, па закључујемо $17 \cdot (-7) \equiv 2 \cdot 3 \pmod{5}$ и слично $17 + (-7) \equiv 2 + 3 \pmod{5}$. Да ли је претходна ситуација плод случајности или последица неке законитости? На срећу, ради се о законитости коју записујемо у облику следеће леме.

Лема 4: Нека је n природан број и a, b, c, d цијели бројеви за које је

$$a \equiv c \pmod{n}, \quad b \equiv d \pmod{n}.$$

Онда вриједи

$$a + b \equiv c + d \pmod{n}, \quad a - b \equiv c - d \pmod{n}, \quad a \cdot b \equiv c \cdot d \pmod{n}.$$

Претходна лема је кључна за рачунање остатака. Сад можемо урадити и онај „захтијеван“ задатак рачунања остатка $2^{201} \cdot 23$ при дијељењу са 5. Видимо $2^2 = 4 \equiv -1 \pmod{5}$, па је одатле, а на основу претходне леме

$$2^4 = 2^2 \cdot 2^2 \equiv (-1) \cdot (-1) \equiv 1 \pmod{5}.$$

Одатле је, користећи исту лему $2^{201} = 2 \cdot (2^4)^{50} \equiv 2 \cdot 1^{50} \equiv 2 \pmod{5}$.

Како је $23 \equiv 3 \pmod{5}$, а $2^{201} \equiv 2 \pmod{5}$, онда је $2^{201} \cdot 23 \equiv 2 \cdot 3 \equiv 1 \pmod{5}$. Видимо, да користећи рачун остатака (конгруенције) успијевамо да ријешимо и оне задатке који су раније изгледали „неосвојиви“, прије свега због обима рачунања.

Примјер 6: Нека је n природан број. Доказати да је највећи заједнички дјелилац бројева $n^2 + 1$ и $(n + 1)^2 + 1$ или 1 или 5, те доказати да је једнак 5 ако и само ако је $n \equiv 2 \pmod{5}$.

Рјешење: Нека је $d = \text{нзд}(n^2 + 1, (n + 1)^2 + 1)$. Тада d дијели број

$$((n + 1)^2 + 1) - (n^2 + 1) = 2n + 1,$$

те број $(2n + 1) - 2(n^2 + 1) = n - 2$.

Према томе, d дијели $(2n + 1) - 2(n - 2) = 5$,

па је $d \in \{1, 5\}$.

Ако број n даје остатке 0, 1, 2, 3, 4 при дијелењу са 5, онда број $n^2 + 1$ даје остатке редом 1, 2, 0, 0, 2 а $(n + 1)^2 + 1$ остатке редом 2, 0, 0, 2, 1. Према томе, бројеви $n^2 + 1$ и $(n + 1)^2 + 1$ истовремено су дјеливи са 5 ако и само ако је $n \equiv 2 \pmod{5}$.

На крају овог кратког увода у конгруенције наводимо једно од најпознатијих тврђења у овој области - **Малу Фермаову теорему**.

Теорема 3: Нека је p прост број, a и цио број који није дјелив са p .
Онда је

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Општије, за свако $w \in \mathbf{Z}$ вриједи $w^p \equiv w \pmod{p}$.

Примјер 7: Нека су a и b природни бројеви и нека за свако $n \in \mathbf{N}$, $a^n + n$ дијели $b^n + n$. Доказати да је $a = b$.

Рјешење: Претпоставимо супротно, $a \neq b$. У том случају мора бити $a < b$. Нека је p прост број већи од b . Нека је $n = (a + 1)(p - 1) + 1 = (a + 1)p - a$. За тако одабрано n , закључујемо да је $n \equiv -a \pmod{p}$. Ако је s природан број такав да $p \mid s$, онда слиједи да $s \equiv 0 \pmod{p}$, па $s^n \equiv s \pmod{p}$. У случају да $p \nmid s$, на основу Мале Фермаове теореме, за свако $s \in \mathbf{N}$

$$s^n = s \cdot (s^{a+1})^{p+1} \equiv s \cdot 1 \equiv s \pmod{p}.$$


Закључујемо да за сваки природан број s вриједи $s^n \equiv s \pmod{p}$, па је тиме и $a^n \equiv a \pmod{p}$ и $b^n \equiv b \pmod{p}$.

Пошто је $n \equiv -a \pmod{p}$ онда $a^n - a \equiv a^n + n \equiv 0 \pmod{p}$. Како је $b^n + n$ дјелив са $a^n + n$, онда је $b^n + n \equiv 0 \pmod{p}$. Одавде је

$$b^n + n \equiv b + n \equiv b - a \pmod{p},$$

односно $p \mid (b - a)$, што је немогуће, јер је прост број p одабран тако да $p > b$. Пошто је ова контрадикција настала као последица претпоставке да је $a \neq b$, закључујемо да је $a = b$.

(Крај)



Dr Goran Šuković

FUNKCIJE U PROGRAMSKOM JEZIKU C++

U svim zadacima koje smo do sada radili pisali smo kod unutar funkcije *main*. Međutim, kod možemo podijeliti u manje cjeline, takozvane funkcije i zatim te cjeline pozivati iz *main*-a ili iz drugih funkcija. Do sada smo koristili "gotove" funkcije iz standardnih biblioteka, na primjer *sqrt*, *floor* ili *abs*. Glavna funkcija našeg programa je *main*, jer izvršavanje programa počinje od nje. Napisaćemo nekoliko funkcija i pokazati kako se pozivaju.

1. Opšti oblik funkcije:

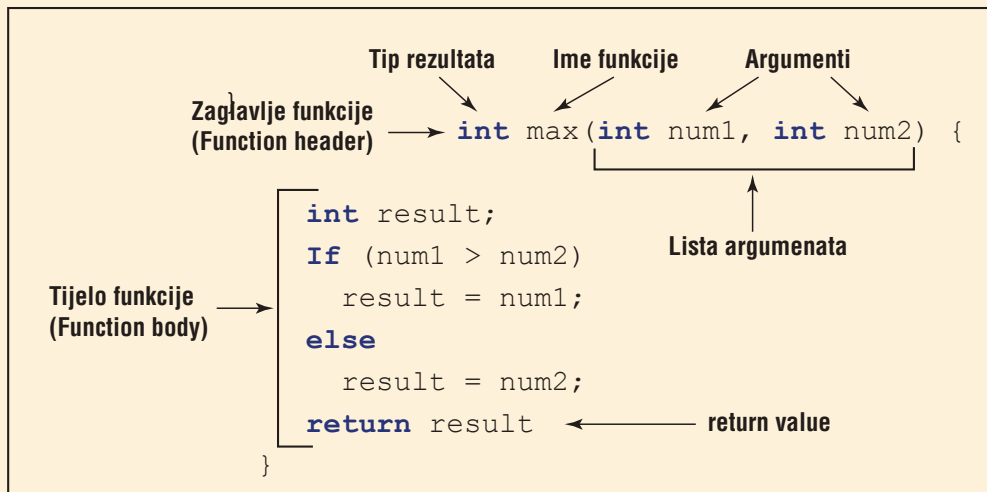
```
tipRezultata imeFunkcije(listaArgumenata)
{
    Naredbe
}
```

2. Ime funkcije: početno slovo je malo, a zatim slijede slova, cifre ili simbol '_'. Primjeri dobrih imena:

```
run
runFast
getBackground
getFinalData
compareTo
setX
isEmpty
is_empty
prostil
pp1
```

3. Funkcija može vraćati vrijednost (engl. return value) i tada se u tijelu funkcije nalazi jedna ili više naredbi `return`. Pogledajte kako su primjeru napisane funkcije `povrsinaPravougona`, `obimPravougona`, `obimKvadrata`, `povrsinaKvadrata`, `brojDjelilaca`, `zbirDjelilaca` i `jeProst`. Ako funkcija ne vraća konkretnu vrijednost, tada je tip rezultata `void`, kao na primjer u funkciji `stampuDjelilaca`. Obratite pažnju da funkciju možete pozvati iz glavne funkcije `main` ili iz neke druge funkcije.

4. Primjer:

Definicija funkcije**Primjeri funkcija**

```

#include <iostream>

using namespace std;

// funkcija koja izracunava povrsinu pravouganka cije su duzine
// stranica a i b
// argumenti (parametri) funkcije: pozitivni brojevi a i b tipa
// double - duzine stranica
// rezultat: povrsina pravougaonika - realan broj
double povrsinaPravougaonika (double a, double b)
{
    double p; // promjenljiva za rezultat
    p = a*b; // izracunavamo povrsinu
    return p; // vracamo rezultat
}

// funkcija koja izracunava obim pravouganka cije su duzine
// stranica a i b
// argumenti (parametri) funkcije: pozitivni brojevi a i b tipa
// double - duzine stranica
// rezultat: obim pravougaonika - realan broj
double obimPravougaonika (double a, double b)
{
    double o; // promjenljiva za rezultat
    o = 2*(a+b); // izracunavamo obim
    return o; // vracamo rezultat
}
  
```

```
// argumenti: duzina stranice kvadrata, pozitivan realan broj
// rezultat: pozitivan realan broj - obim kvadrata
// poziv funkcije iz druge funkcije
double obimKvadrata(double a)
{
    double o;
    o = obimPravougaonika(a,a); // kvadrat je pravouganik sa
jednakim stranicama
    return o;
}

// argumenti: duzina stranice kvadrata, pozitivan realan broj
// rezultat: pozitivan realan broj - površina kvadrata
// slicno funkciji obimKvadrata, samo krace
double površinaKvadrata(double a)
{
    return površinaPravougaonika(a,a);
}

// argument: pozitivan cio broj
// rezultat: pozitivan cio broj - broj djelilaca broja n,
ukljucujuci 1 i n
int brojDjelilaca(int n)
{
    int i = 1, brDjelilaca = 0;
    while (i<=n)
    {
        if (n%i == 0)
        {
            brDjelilaca++; // brDjelilaca = brDjelilaca + 1;
        }
        i++; // i = i+1;
    }
    return brDjelilaca;
}

// argument: pozitivan cio broj n>=1
// rezultat: pozitivan cio broj - zbir djelilaca broja n, ne
ukljucujuci n
int zbirDjelilaca(int n)
{
    int i = 2, zbirDjelilaca = 1;
    while (i<=n/2)
    {
        if (n%i == 0)
        {
            zbirDjelilaca = zbirDjelilaca + i;
        }
        i++; // i = i+1;
    }
    return zbirDjelilaca;
}
```

10 Dijagonala

```
// argument: pozitivan cio broj n>=1
// rezultat: štampa sve djelioce broja n, ne ukljucujuci 1 i n,
// po jedan u redu
void stampaDjelilaca(int n)
{
    int i = 2;
    while (i<=n/2)
    {
        if (n%i == 0)
        {
            cout << i << endl;
        }
        i++; // i = i+1;
    }
}

// argument: pozitivan cio broj n>1
// rezultat: true, ako je broj prost, ili false, ako nije prost
bool jeProst(int n)
{
    int r = brojDjelilaca(n);
    if (r == 2)
    {
        return true; // jeste prost, jer ima samo 2 djelioaca: 1 i n
    }
    else
    {
        return false; // nije prost
    }
}

int main()
{
    double r = 0.0;
    // pozivamo funkciju površinaPravougaonika (engl. function
    // call)
    // argument a dobija vrijednost 4, argument b dobija
    // vrijednost 5.5
    r = površinaPravougaonika(4, 5.5);
    cout << r << endl; // stampa 22

    // argument a dobija vrijednost 4+5/2 tj. 6, argument b
    // postaje 5.5+1.5 tj. 7.0
    r = površinaPravougaonika(4+5/2, 5.5+1.5);
    cout << r << endl; // stampa 42

    // moze i bez promjenljive r
    int x = 3;
    cout << površinaPravougaonika(12, x+3) << endl;
}
```

```

// funkcija vraca rezultat koji se moze koristiti u izrazima
r = 10 + 2*povrsinaPravougaonika(12,5);
cout << r << endl;

cout << obimPravougaonika(20, 12) << endl;
x = 20;
cout << "Kvadrat - O=" << obimKvadrata(x) << " P=" <<
povrsinaKvadrata(x) << endl;

cout << "Broj djelilaca " << brojDjelilaca(24) << " " <<
brojDjelilaca(19) << endl;
cout << brojDjelilaca(25) << endl;
cout << "Zbir djelilaca " << zbirDjelilaca(24) << " " <<
zbirDjelilaca(19) << endl;
cout << zbirDjelilaca(25) << endl;
cout << "Kraj" << endl;

// pozivanje funkcije koja vraca void
stampaDjelilaca(24);

return 0;
}

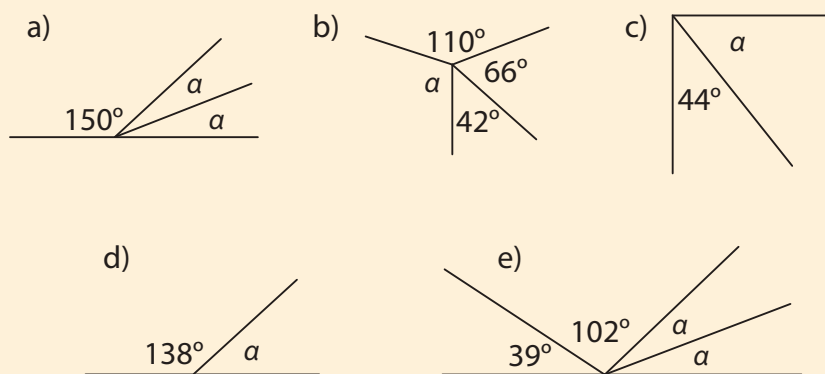
```

Zadaci za vježbu

1. Napisati funkciju double promjena(double x, double a) koja vraća broj $a \cdot x$, ako je x nenegativan i a/x , ako je x negativan.
2. Napisati funkciju int zbirIzIntervala(int a, int b) koja vraća zbir svih cijelih brojeva iz intervala [a,b]
3. Napisati funkciju boolean pripadaIntervalu (int a, int b, int x) koja vraća true ako broj x pripada intervalu [a, b] a false ako ne pripada.
4. Napisati funkciju int zbirCifara(int n) koja vraća zbir cifara broja n.
5. Napisati funkciju int najvecaCifra(int n) koja vraća najveću cifru broja n.
6. Napisati funkciju int minMaxCifra(int n) koja vraća zbir najveće i najmanje cifre broja n.
7. Napisati funkciju void print3K(int a, int b) koja štampa sve cijele brojeve iz intervala [a,b] koji su oblika $3k+1$, za neko cjelobrojno k.

ZADACI ZA VJEŽBU**VI razred****Priprema za drugi pismeni zadatak.
Kružnica. Uglovi.**

1. Odrediti komplementan ugao uglu $\alpha = 43^\circ 25' 47''$.
2. Izračunati nepoznati ugao sa slike:

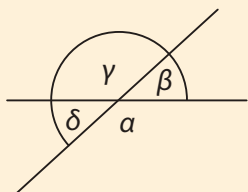


3. Nacrtať kružnicu proizvoljnog poluprečnika i na njoj tačke A, B i C. Obilježiti:
 - a) tetivu AC;
 - b) kružni luk CB.
4. Zbir dva ugla sa paralelnim kracima je $116^\circ 48' 12''$. Odrediti te uglove.
5. Koliko stepeni ima ugao koji je jednak:
 - a) petini svog komplementnog ugla;
 - b) polovini svog suplementnog ugla?
6. Ugao α je pet puta manji od sebi suplementnog ugla β . Izračunati $\alpha + 2\beta$.
7. Uglovi α i β su suplementni, a uglovi β i γ su komplementni. Odrediti uglove α , β i γ ako je α pet puta veći od ugla: a) β ; b) γ .
8. Nacrtať prav, tup i oštar ugao α , β i γ , a zatim konstruisati ugao $3\alpha - 2\gamma + \beta$.
9. Dati su uglovi $\alpha = 12^\circ 18'$ i $\beta = 33^\circ 33'$. Izračunati uglove:
 - a) $5\alpha + \beta$;
 - b) $2\beta - \alpha$.
10. Ugao α je jednak $\frac{4}{5}$ pravog ugla, a ugao β je jednak $\frac{1}{6}$ opruženog ugla. Uporediti uglove α i β .

Prijedlog drugog pismenog zadatka

I grupa

- Dati su uglovi $\alpha_1 = 92^\circ$, $\alpha_2 = 35^\circ$, $\alpha_3 = 87^\circ$, $\alpha_4 = 102^\circ$, $\alpha_5 = 200^\circ$, $\alpha_6 = 360^\circ$, $\alpha_7 = 90^\circ$, $\alpha_8 = 176^\circ$, $\alpha_9 = 2^\circ$ i $\alpha_{10} = 180^\circ$.
Koji uglovi su: a) pravi; b) oštri; c) tupi; d) opruženi; e) konveksni; f) nekonveksni; g) puni?
- Dati su uglovi $\alpha = 64^\circ 28' 32''$ i $\beta = 32^\circ 53' 15''$. Izračunati: a) $\alpha + \beta$; b) $\alpha - \beta$; c) komplementni ugao uglu α ; d) suplementni ugao uglu β .
- Zbir uglova β , γ i δ sa slike je 206° . Koliki su uglovi α , β , γ i δ ?

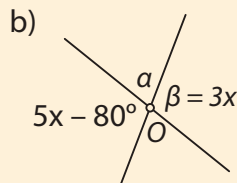
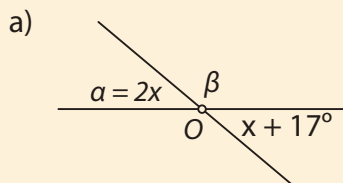


- Odrediti mjere uglova s paralelnim kracima ako je je jedan od njih:
 - četiri puta veći od drugog ugla;
 - za 160° manji od drugog ugla.
- Ugao α je za $\frac{2}{5}$ pravog ugla veći od sebi suplementnog ugla. Izračunati ugao α .

II grupa

- Popuniti prazna mjesta:
 $50^\circ = \underline{\hspace{2cm}}' = \underline{\hspace{2cm}}''$
 $\underline{\hspace{2cm}}^\circ = 680' = \underline{\hspace{2cm}}''$
 $537' = \underline{\hspace{2cm}}^\circ \underline{\hspace{2cm}}'$
 $10^\circ 5' 53'' = \underline{\hspace{2cm}}''$
- Dati su uglovi: $\alpha = 29^\circ 32' 43''$, $\beta = 37^\circ 28' 36''$. Izračunati:
 a) $\alpha + \beta$; b) $\beta - \alpha$; c) $2 \cdot \alpha$; d) $\beta : 2$; e) komplementan ugao uglu α .
- Dvije prave se sijeku i obrazuju četiri ugla. Ako je mjera jednog od njih $46^\circ 28' 32''$, izračunati mjere ostala tri ugla.
- Izračunati mjeru ugla koji je:
 - za $1452'$ manji od svog komplementnog ugla;
 - 7 puta veći od svog suplementnog ugla.

5. Izračunati mjere uglova α i β predstavljenih na slici:



Ivana Dragaš, JU OŠ „Dr Radoslav Jagoš Vešović“, Kolašin

VII razred

Priprema za drugi pismeni zadatak.

Nejednačine sa množenjem i dijeljenjem u skupu \mathbb{Z} . Trougao.

- Riješiti nejednačine i rješenja predstaviti na brojnoj pravoj:
 - $15 - 2 \cdot x \leq -|5 - 6|$,
 - $(3 \cdot x + 2) \cdot (-4) \leq -80$,
 - $(6 - 4 \cdot x) \cdot (-2) + 17 \leq -19$,
 - $(15 - 2 \cdot x) : (-3) \geq 5 - 8$,
 - $2 \cdot |x| - 11 \leq -1$.
- Koji cio broj ima svojstvo da njegova dvostruka vrijednost umanjena za proizvod brojeva -15 i 4 nije veća od razlike broja -48 i količnika brojeva 48 i 12 . Koliko ima takvih brojeva?
- Da li postoji jednakokraki trougao čiji je obim 32 cm, a osnovica 18 cm. Objasniti!
 - Da li postoji trougao čiji je obim $O = 53$ cm, ako je jedna stranica tog trougla 3 puta veća od najmanje stranice, a druga za 8 cm veća od najmanje stranice tog trougla?
- Ugao na osnovici jednakokrakog trougla je četiri puta veći od ugla pri vrhu. Izračunati uglove trougla i uporediti krak i osnovicu.
 - Poređati po veličini stranice ΔABC , ako je unutrašnji ugao kod tjemena B jednak 72° , a spoljašnji ugao kod tjemena A je za 52° veći od njemu susjednog unutrašnjeg ugla.
- Dat je ΔABC . Na produžetku stranice AB kroz tačku A i na produžetku iste stranice kroz tačku B označene su redom tačke M i K tako da je $AC = AM$ i $BC = BK$. Odrediti uglove ΔMKC ako je (u ΔABC) ugao kod tjemena A jednak 60° , a ugao kod tjemena B jednak 70° .

6. a) Mjerni brojevi stranica trougla su prirodni brojevi i dvije stranice su dužina 5 cm i 35 cm. Koliko može iznositi dužina treće stranice ako je djeljiva sa 7?
 b) Jedan oštar ugao pravouglog trougla iznosi $\frac{2}{7}$ drugog oštrog ugla.

Izračunati spoljašnje i unutrašnje uglove tog trougla.

7. Veličina tupog ugla obrazovanog bisektrisa povučene iz tjemena na osnovici jednakokrakog trougla je 118° . Izračunati sve unutrašnje i spoljašnje uglove tog trougla. Šta je veće krak ili osnovica?
 8. Tačke M i N dijele osnovicu AB jednakokrakog trougla ABC na tri jednaka dijela. Dokazati da je $MC = NC$.
 9. Na produžecima osnovice AB jednakokrakog $\triangle ABC$ preko tjemena A i B uočiti tačke E i D takve da je $AD = BE$. Dokazati da je $DC = EC$.
 10. Dokazati da su težišne duži koje odgovaraju kracima jednakokrakog trougla jednake dužine.

Prijedlog drugog pismenog zadatka

I grupa

1. a) Dužine dvije stranice trougla su 7 cm i 3 cm. Kolika može da bude dužina treće stranice trougla ako je ona paran prirodan broj?
 b) Odrediti unutrašnje uglove trougla ABC ako je $\alpha = x + 10^\circ$, $\beta = x + 22^\circ$, $\gamma = x - 29^\circ$.
 2. Riješiti nejednačine i rješenja predstaviti na brojnoj pravoj:
 a) $15 + 2 \cdot x \geq -5 + 14$, b) $(3x - 4) : (-5) < -8 : (-4)$.
 3. Odrediti unutrašnje uglove jednakokrakog trougla ako simetrale uglova na osnovici obrazuju ugao od 110° . Šta je duže, osnovica ili krak?
 4. Unutrašnji ugao pravouglog trougla ABC je za 54° manji od susjednog spoljašnjeg ugla. Odrediti ugao koji obrazuju visina i bisektrisa povučene iz tjemena pravog ugla tog trougla.
 5. Nacrtao ugao $\angle xOy$. Prava p koja je normalna na simetralu s tog ugla siječe krake ugla u tačkama E i F. Dokazati da je trougao OEF jednakokraki.

II grupa

- Dužine dvije stranice trougla su 10 cm i 16 cm, a treća stranica je jednaka polovini jedne od datih stranica. Odrediti dužinu treće stranice.
 - Spoljašni ugao na osnovici jednakokrakog trougla je 122° . Izračunati unutrašnje uglove tog trougla i uporediti osnovicu i krak.
- Riješiti nejednačine i rješenja predstaviti na brojnoj pravoj:
 - $(9 - 4 \cdot x) \cdot (-2) + 22 \leq -20$,
 - $(-4 \cdot x + 3) : (-5) + 11 < (-8) \cdot (-1 - 1)$.
- Unutrašnji ugao β pravouglog ΔABC iznosi $\frac{2}{7}$ susjednog spoljašnjeg ugla. Uporediti stranice ΔABC .
- Veličina tupog ugla obrazovanog visinama spuštenim na krakove oštroglog jednakokrakog trougla je 122° . Izračunati sve unutrašnje i spoljašnje uglove tog trougla.
- Nad stranicom BC kvadrata ABCD, sa spoljašnje strane konstruisan je jednakokraki trougao BCE (osnovica BC). Dokazati da je trougao AED jednakokraki.

Branka Vujičić, JU OŠ „Sutjeska“, Podgorica

VIII razred

**Priprema za drugi pismeni zadatak
Kvadratni korijen. Stepeni. Polinomi.**

- Zapisati u obliku kvadrata količnika:
 - $\frac{64x^2}{y^2z^2}$,
 - $\frac{a^2b^2}{49c^2}$.
- Uprostiti izraze:
 - $\frac{x^9 \cdot x^6 \cdot x}{x^2 \cdot x^7}$,
 - $\frac{(x \cdot y^3)^2}{x^3 \cdot y} \cdot \frac{(x^2 \cdot y^2)^2}{(x \cdot y^3)^2}$,
 - $\frac{16^3 \cdot 4^3}{8^3}$.
- Izračunati brojevnu vrijednost izraza:
 - $\left(2 - \frac{1}{3}\right)^2$,
 - $2^2 + 3^2 - 5^2 - (-7^2)$,
 - $-3^2 + \left(1\frac{1}{2}\right)^2 - (-0,2)^2$,

$$d) 2 \cdot \frac{1}{2^2} - (2 - \frac{1}{3})^2 + (0.3 - \frac{2}{5})^2 \cdot (2 - \frac{9}{2})^2,$$

$$e) \sqrt{12^2 + 5^2} + \frac{3}{5} \cdot \sqrt{3 - \frac{74}{81}} - \sqrt{0,16},$$

$$f) \sqrt{-(2 \cdot 4 - 3 \cdot 11)} + \sqrt{0,25} \cdot \sqrt{-\frac{3}{4} + 3} - \frac{\sqrt{(-3)^2}}{(-2)^2}.$$

4. Uprostiti izraze:

$$a) \sqrt{8} - 3\sqrt{32} + \frac{4}{\sqrt{2}},$$

$$b) 3\sqrt{50} - 2\sqrt{18} + \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

5. Izračunati: a) $\frac{((-4)^5)^2 : (-4)^3 \cdot (-4)}{((-4)^2 \cdot (-4))^3 : (-4)},$

b) $\frac{((-7)^4)^3 : (-7)^8 \cdot (-7)}{((-7)^5 : (-7))^3 : ((-7)^3)^3}.$

6. Odrediti vrijednost promjenljive x , tako da se dobije tačna jednakost:

$$a) 7^x = (7^{14} \cdot 7^6) : 7^{16};$$

$$b) 9^8 - 2 \cdot 9^5 - 9^6 = x \cdot 9^5.$$

7. Na koordinatnoj pravoj prikazati skup tačaka koji zadovoljava uslov:

$$a) |x| \geq 3,$$

$$b) |x - 1| \leq 2.$$

8. Dokazati da je vrijednost izraza $16^4 - 2^{13} - 4^5$ djeljiva sa 110.

9. Dati su polinomi:

$$A = 2x^4 - 7x^2 + 3x - 1, \quad B = x^4 - 6x^2 - 1 \quad \text{i} \quad C = -5x^2 + x - 3.$$

$$\text{Srediti polinom:} \quad a) A - (B + C), \quad b) (A - B) - (B - C).$$

10. Uprostiti izraze: a) $(4x - 1)(3x^2 - 2x + 2) - 5(x^3 - 6x^2 + 7x - 1),$

$$b) (x - 2y)(x + 3y) - (2x + 3y)(2x - y).$$

Prijedlog drugog pismenog zadatka

I grupa

1. Uprostiti izraze: a) $\frac{x^7 \cdot x^3 \cdot x}{x^6 \cdot x^4},$ b) $\frac{(a \cdot b^3)^2}{a^3 \cdot b} \cdot \frac{(a^2 \cdot b^2)^2}{(a \cdot b^3)^2},$ c) $\frac{8^3 \cdot 2^3}{4^3}.$

2. Izračunati vrijednost brojnih izraza:

$$a) (-\frac{9}{11})^5 \cdot (-11)^5 \cdot (\frac{11}{9})^5 \cdot (-\frac{9}{11})^5,$$

$$b) \sqrt{1\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{20 + 2 \cdot (-2)} - \sqrt{(-3)^2} - (-2)^2.$$

3. a) Uprostiti izraze:

$$\text{i) } -\frac{1}{3}a^3b \cdot \frac{1}{2}ab^2c \cdot (-1, 2a^2bc^3), \quad \text{ii) } \frac{3}{\sqrt{3}} - \sqrt{27} + 2\sqrt{48}.$$

b) Na koordinatnoj pravoj prikazati skup tačaka koje zadovoljavaju uslov $|x + 2| > 1$.

4. a) Dati su polinomi: $A(a) = 2a^4 - a^3 - 8a^2 + 5a + 11$,
 $B(a) = -5a^4 - 7a^3 - 12a^2$ i $C(x) = 7a^2 - 9a - 5$.

Srediti polinom $A(a) - (B(a) + C(a))$.

b) Uprostiti izraz $(a - 3b)(a + 3b) - (4a + 3b)(2b - a)$.

5. a) Dokazati da je vrijednost izraza $(5^7 - 5^6) \cdot (5^7 + 5^6)$ djeljiva sa 8.

b) Odrediti vrijednost promjenljive x , tako da se dobije tačna jednakost

$$\left(\frac{b^4}{81} \cdot \frac{b}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{b^2 \cdot b}{27} \cdot \frac{b}{3}\right)^x = \left(\frac{b}{3}\right)^x.$$

II grupa

1. Uprostiti izraze: a) $\frac{x^6 \cdot x^5 \cdot x}{x^7 \cdot x^2}$, b) $\frac{(m \cdot n^3)^2}{m^3 \cdot n} \cdot \frac{(m^2 \cdot n^2)^2}{(m \cdot n^3)^2}$, c) $\frac{27^3 \cdot 3^3}{9^3}$.

2. Izračunati vrijednost brojnih izraza:

$$\text{a) } \left(-\frac{7}{9}\right)^5 \cdot (-9)^5 \cdot \left(\frac{9}{7}\right)^5 \cdot \left(-\frac{7}{9}\right)^5,$$

$$\text{b) } \sqrt{(-3)^2} - (-2)^2 - \sqrt{7\frac{1}{5}} \cdot \sqrt{5} - \sqrt{6^2 + 2 \cdot (-10)}.$$

3. a) Uprostiti izraze: i) $-\frac{2}{5}xy^3 \cdot 1\frac{2}{3}xy^3z^2 \cdot (-0,5x^3y^2z)$,

$$\text{ii) } \sqrt{8} - 3\sqrt{32} + \frac{4}{\sqrt{2}}.$$

b) Na koordinatnoj pravoj prikazati skup tačaka koji zadovoljava uslov $|x - 3| \leq 2$.

4. a) Dati su polinomi: $A(a) = 2a^4 - a^3 - 8a^2 + 5a + 11$,
 $B(a) = -5a^4 - 7a^3 - 12a^2$ i $C(a) = 7a^2 - 9a - 5$.

Srediti polinom $A(a) + B(a) - C(a)$.

b) Uprostiti izraz $(3x - y)(3x + y) - (x + 3y)(2y - 4x)$.

5. a) Dokazati da je vrijednost izraza $(8^7 - 8^6) \cdot (8^7 + 8^6)$ djeljiva sa 7.
 b) Odrediti vrijednost promjenljive x , tako da se dobije tačna jednakost

$$\left(\frac{a^2 \cdot a^3}{4 \cdot 8}\right)^x : \left(\frac{a^2 \cdot a}{8} \cdot \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^x.$$

Sanda Ivanović, JU OŠ „Sutjeska”, Podgorica

IX razred

Priprema za drugi pismeni zadatak. Linearna funkcija. Prizma.

- Kojoj od ponuđenih implicitno zadatih linearnih funkcija odgovara eksplicitno zadata funkcija $y = 3x + 2$?
 a) $x + 3y - 2 = 0$; b) $3x - y + 2 = 0$; c) $x - 3y - 2 = 0$;
 d) $3x - y - 2 = 0$; e) $2x - y + 3 = 0$.
- Linearnu funkciju zadatu formulom $3x + 2y - 6 = 0$ prevesti u eksplicitni oblik, a zatim nacrtati njen grafik.
- Ne crtajući grafike obrazložiti u kakvom su međusobnom odnosu grafici linearnih funkcija: $y = 3x - 2$ i $3x - y + 3 = 0$.
- Popuniti tabelu koja odgovara linearnoj funkciji zadatoj formulom

$$y = \frac{3}{2}x - 6.$$

x	-2	0			$1\frac{1}{3}$	
y			0	$\frac{2}{3}$		$-4\frac{1}{4}$

- Odrediti parametar m za koji funkcija $(m - 2)x + 2y - 6 = 0$
 a) ima nulu funkcije za $x = -1$; b) je opadajuća.
- Odrediti formulu kojom je zadata linearna funkcija čiji grafik prolazi kroz tačke $A(-3, 1)$ i $B(1, 2)$.
- Odrediti formulu kojom je zadata linearna funkcija čiji je grafik paralelan grafiku funkcije $2x - y + 7 = 0$ i prolazi kroz tačku $A(1, -1)$.
- Baza prave četverostrane prizme je romb čije su dijagonale dužina 16 cm i 12 cm. Izračunati površinu prizme ako je njena visina $H = 8$ cm.

9. Veći dijagonalni presjek pravilne šestostrane prizme je kvadrat površine 64 cm^2 . Izračunati površinu te prizme.
10. Izračunati površinu pravilne jednakoivične trostrane prizme čija je površina omotača 108 cm^2 .

Prijedlog drugog pismenog zadatka

I grupa

1. Linearnu funkciju zadatu formulom $x - 4y + 4 = 0$ prevesti u eksplisicetni oblik, nacrtati njen grafik i odrediti intervale na kojima je funkcija pozitivna, odnosno negativna.
2. Odrediti vrijednost parametra m za koju je grafik funkcije $(m + 2)x - 2y + 4 = 0$ paralelan sa grafikom funkcije $2y + x - 6 = 0$.
3. Izračunati obim i površinu trougla koji grafik funkcije $4x - 3y + 24 = 0$ obrazuje sa koordinatnim osama.
4. Nacrtati grafik funkcije $y = 3 - |x - 2|$.
5. Baza prave trostrane prizme je pravougli trougao čija je kateta 3 cm , a hipotenuza je za 1 cm duža od druge katete. Izračunati površinu prizme ako je najveća strana njenog omotača kvadrat.

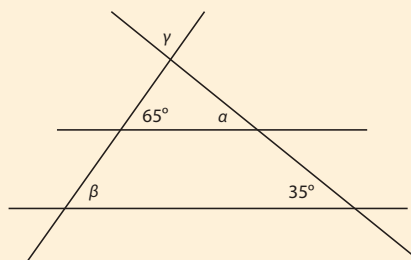
II grupa

1. Linearnu funkciju zadatu formulom $3x + 2y + 6 = 0$ prevesti u eksplisicetni oblik, nacrtati njen grafik i provjeriti da li tačka $A(-3, 2)$ pripada grafiku date funkcije.
2. Data je funkcija $y = (p + 3)x + (p - 6)$. Odrediti vrijednost parametra p tako da je nula funkcije $x = 6$.
3. Izračunati površinu trougla određenog x -osom i graficima funkcija:
 $2y - x - 4 = 0$ i $3y + x - 6 = 0$.
4. Nacrtati grafik funkcije: $y = \begin{cases} 2x - 1, & x < 1 \\ 2 - x, & x \geq 1 \end{cases}$
5. Manji dijagonalni presjek pravilne šestostrane prizme je kvadrat površine 48 cm^2 . Izračunati površinu te prizme.

ODABRANI ZADACI

VI razred

1. Koje cifre treba ukloniti iz broja 127912345 da bi se dobio najveći mogući broj djeljiv sa 6?
2. Odrediti suplement komplementa ugla $\alpha = 28^{\circ}39'40''$.
3. Odrediti nepoznate uglove sa slike.



4. Odrediti koja se cifra nalazi na 2020. mjestu poslije decimalnog zareza u decimalnom zapisu broja $\frac{18}{11}$.

VII razred

1. U trouglu ABC je $AC = BC$. Simetrala ugla α siječe simetralu ugla γ u tački S , tako da je ugao $ASC = 108^{\circ}$. Uporediti stranice AB i AC .
2. U trouglu ABC ugao kod tjemena C je prav. Na stranici AB su date tačke M i N , takve da je $AM = AC$ i $BN = BC$. Izračunati ugao MCN .
3. Kroz tačku P osnovice AB jednakokrakog trougla ABC povučena je prava p normalna na AB . Prava p siječe pravu BC u M i pravu AC u N . Dokazati da je trougao CMN jednakokraki.
4. U oštrogom trouglu ABC visine AD i CE sijeku se u tački H , pri čemu je $AB = CH$. Dokazati da je ugao $BCA = 45^{\circ}$.

VIII razred

1. Koji četvorocifreni broj ima svojstva:
 - a) njegova prva cifra jednaka je drugoj, a treća cifra jednaka je četvrtoj,
 - b) da je taj četvorocifreni broj kvadrat jednog dvocifrenog broja?
2. Uporediti razlomke $\frac{2020}{2021}$ i $\frac{20202021}{20212020}$.

3. Odrediti broj a tako da razlomak $\frac{a^2 - 8}{8 + a^2}$ ima najmanju vrijednost.

4. Racionalisati imeniocce:

$$\text{a) } \frac{\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}}; \quad \text{b) } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

IX razred

1. Data je linearna funkcija $\frac{6}{8}x + \frac{5}{10}y - 3 = 0$. Zapisati funkciju u obliku $y = kx + n$, a zatim izračunati površinu trougla koji obrazuju grafik te funkcije i koordinatne ose.
2. Nacrtati grafik funkcije $f(x) = |x - 4| - |x - 5|$.
3. Nacrtati grafik funkcije $f(x) = \sqrt{9x^2 + 9 + 18x}$.
4. Površina baze pravilne četverostrane piramide je 100 cm^2 , a njena apotema je h . Izraziti površinu piramide u funkciji apoteme h . Da li je ta funkcija linearna?

**Ljiljana Vučić, Jasna Todorović, Nikola Radojičić,
JU OŠ „Milija Nikčević”, Nikšić**

TAKMIČARSKI ZADACI

VI razred

1. Odrediti zbir svih razlomaka čiji je imenilac veći od 2, brojilac manji od 100, a da im je vrijednost jednaka $\frac{1}{2}$.
2. Uglovi α i β su suplementni, $\frac{2}{5}\alpha$ i β su komplementni. Izračunati razliku α i β .

VII razred

1. U trouglu ABC ugao kod tjemena B jednak je 15° , a ugao kod tjemena C je 30° . Prava koja sadrži tjemena A i normalna je na stranicu AB siječe stranicu BC u tački D. Dokazati da je $BD = 2AC$.
2. Dat je nejednakostranični trougao ABC i središta E, F, G, redom stranica AB, AC i BC. Sa spoljne strane trougla povučene su duži $EM = AB/2$ i $FN = AC/2$, tako da je EM normalno na AB i FN normalno na AC. Dokazati da je $GM = GN$.

VIII razred

1. Uprostiti izraz $\sqrt{4,5 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}}$.
2. Dokazati da je zbir $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2000}$ djeljiv sa 30.

IX razred

1. U koordinatnoj ravni xOy je data tačka $M(5, 3)$. Kroz tačku M konstruisana je prava p koja koordinatne ose siječe u tačkama $A(a, 0)$ i $B(0, b)$. Odrediti sve vrijednosti a i b tako da su a i b prirodni brojevi.
2. Dijagonalni presjek pravilne četverostrane piramide je jednakostranični trougao površine $k^2\sqrt{3}$. Izračunati površinu i zapreminu te piramide.

Ljiljana Vučić, Jasna Todorović, Nikola Radojičić,
JU OŠ „Milija Nikčević”, Nikšić

RJEŠENJA TAKMIČARSKIH ZADATAKA IZ PROŠLOG BROJA

VI razred

1. Odrediti cifru x tako da je broj $\overline{94x60}$ djeljiv sa 56.
2. Koji je: a) najveći; b) najmanji, prirodan broj djeljiv sa 45 u čijem zapisu se koriste sve cifre tačno po jedanput?

Rješenja:

1. Broj $\overline{94x60}$ je djeljiv sa 56 ako je djeljiv brojevima 8 i 7 koji su uzajamno prosti. Broj $\overline{94x60}$ je djeljiv sa 8 ako je broj $\overline{x60}$ djeljiv sa 8, pa je $x \in \{1,3,5,7,9\}$. Provjerom, tj. dijeljenjem sa 7 svih pet brojeva koji su djeljivi sa 8 nalazimo da je samo 94360 djeljiv sa 56.
2. Zbir svih cifara 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9 je 45, pa je broj, u čijem zapisu se koriste sve cifre tačno po jedanput, djeljiv sa 9. Djeljivost sa 5 obezbjeđuje posljednja cifra.
 - a.) Najveći od takvih brojeva je 9876543210.
 - b.) Najmanji od takvih brojeva je 1023467895.

VII razred

1. Šta je veće i za koliko: zbir svih cijelih brojeva a koji zadovoljavaju uslov $-1777 < a < 1077$ ili proizvod tih brojeva?

2. Milica je nekoliko od 10 listova papira isjekla na 10 dijelova, zatim je od dobijenih dijelova isjekla još nekoliko njih na 10 dijelova, itd. Na kraju je prebrojala ukupno 2020 komada papira. Dokazati da je Milica pogriješila u brojanju.

Rješenja:

1. Proizvod datih brojeva je: $-1776 \cdot (-1775) \cdot \dots \cdot (-1) \cdot 0 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1076 = 0$.

Zbir datih brojeva je:

$$-1776 + (-1775) + \dots + (-1077) + \underbrace{(-1076) + \dots + 1076}_0 =$$

$$-(1776 + 1775 + \dots + 1078 + 1077) = -998550$$

Veći je proizvod datih brojeva za 998550.

2. Ako je Milica od 10 listova isjekla n listova na n dijelova, tada je dobila $10n + (10 - n) = 9n + 10$ komada papira. Ovo se može zapisati i kao:

$$10n + (10 - n) = 10n + 10 - n = 9n + 10 = \underline{9(n + 1) + 1}.$$

Kada je isjekla sljedećih m listova na 10 dijelova, imala je ukupno

$10m + (9n + 10 - m)$ komada papira. Ovo se može zapisati i kao:

$$10m + (9n + 10 - m) = 10m + 9n + 10 - m = 9m + 9n + 10 = \underline{9(m + n + 1) + 1}.$$

Poslije svakog novog siječenja, uvijek će se dobiti da je ukupan broj svih komada papira oblika $9k + 1$, gdje je k neki prirodan broj. Može se zaključiti i da ukupan broj svih komada papira pri dijeljenju sa 9 daje ostatak 1. Kako je $2020 = 9 \cdot 224 + 4$ (ostatak je 4, a ne 1), zaključak je da je Milica pogriješila u brojanju.

VIII razred

1. Tri učenika igraju stoni tenis na ispadanje tj. igrač koji izgubi ustupa mjesto igraču koji nije u toj partiji učestvovao. Odigrana je ukupno 21 partija. Petar je odigrao ukupno 10 partija, Boris 15, a Vlado 17. Ko je od njih izgubio u šestoj partiji?
2. Ako su x , y i z cijeli brojevi takvi da je $3x + 7z = y$, dokazati da je broj $(y - 4z)(4x + y)$ djeljiv sa 21.

Rješenja:

1. Ukupno je odigrana 21 partija $((10 + 15 + 17) : 2 = 21)$. Primijetimo da nijedan igrač nije mogao propustiti dvije uzastopne partije. Kako je Petar propustio 11 partija od 21, znači da je igrao sve partije sa parnim rednim brojevima i samo njih. Kako on nije igrao sedmu partiju, to znači da je eliminisan u šestoj. Dakle, šestu partiju je izgubio Petar.

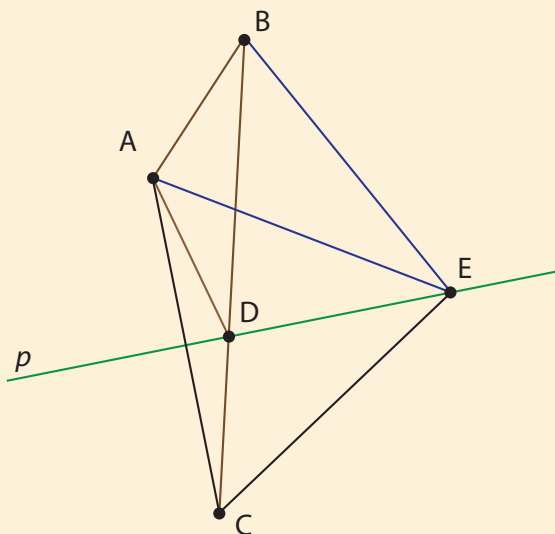
2. Iz $3x + 7z = y$ je $y - 4 = 3(x + z)$ pa je broj $y - 4z$ djeljiv sa 2. S druge strane, iz $3x + 7z = y$ je $y + 4x = 7(x + z)$, pa je broj $y + 4x$ djeljiv 7. Dakle, proizvod $(y - 4z)(4x + y)$ je djeljiv sa 21.

IX razred

1. Dvostruka površina pravilnog šestougla jednaka je trostrukoj površini jednakostraničnog trougla. Odrediti razmjeru obima šestougla i trougla.
2. U ravni α data je prava p i tačke A i B sa iste strane te prave. Tačka C je osa simetrije tačke A u odnosu na pravu p . Presjek prave p i BC je tačka D. Neka je E bilo koja tačka na pravoj p , različita od D. Dokazati da je obim trougla ABD manji od obima trougla ABE.

Rješenja:

1. Ako je a dužina stranice šestougla i b dužina stranice trougla, tada je $2 \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = 3 \cdot \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$, pa je $4a^2 = b^2$. Kako su a i b pozitivne veličine, onda je $2a = b$, tj. $6a = 3b$, što pokazuje da su obimi ovih figura jednaki.
2. Zbog simetričnosti tačaka A i C u odnosu na pravu p (slika 1) je $AD = CD$ i $AE = CE$, pa je obim trougla ABD jednak $AB + BD + AD = AB + BD + DC$. Slično je obim trougla ABE jednak $AB + BE + AE = AB + BE + CE$. Na osnovu osobine trougla da je zbir dvije stranice veći od treće stranice, za trougao BCE imamo da je $BC < BE + CE$, pa je $AB + BC < AB + BE + CE$, tj. obim trougla ABD je manji od obima trougla ABE.



Slika 1

PRIPREMA ZA ČAS

Škola	JU OŠ „Druga osnovna“, Budva
Predmet	Matematika
Razred	Sedmi
Sadržaj i pojmovi	Odnos stranica i uglova u trouglu
Ishodi učenja	Tokom učenja učenici će moći da razumiju i koriste tvrđenja o međusobnom odnosu stranica i uglova u trouglu
Oblici rada	Frontalni, rad u grupama
Nastavne metode	Monološko–dijaloška, demonstrativna
Nastavna sredstva	Pribor za geometriju
Nastavnica	Mirjana Solujić, profesorica

Tok časa

Uvodni dio časa (5 do 10 minuta)

1. korak/aktivnost

Nakon provjere tačnosti izrade domaćih zadataka sa prethodnog časa, učenici odgovaranjem na pitanja obnavljaju:

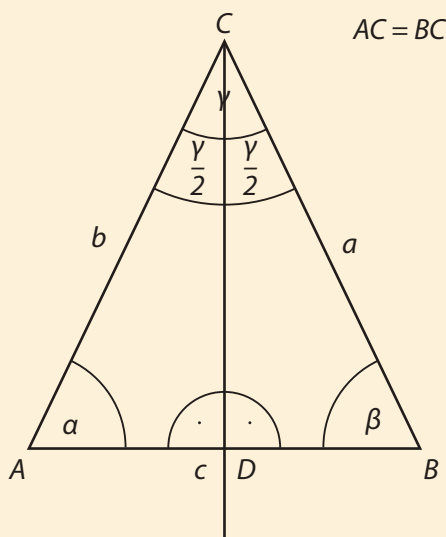
- * osnovne elemente trougla,
- * uglove trougla: konstantnost zbira unutrašnjih i zbira spoljašnjih uglova trougla,
- * stranice trougla: njihov odnos tj. kakve moraju biti stranice trougla,
- * podjelu trougla prema veličini njihovih stranica,
- * simetralu ugla i simetralu duži i njihova svojstva.

Glavni dio časa (30 do 35 minuta)

2. korak/aktivnost

Nastavnik kroz primjere izvodi tvrđenja i upoznaje učenike u kakvom međusobnom odnosu mogu biti stranice i unutrašnji uglovi trougla tj. kako veličina stranica utiče na veličinu unutrašnjih uglova u trouglu i obrnuto.

Primjer 1. Nacrtati trougao ABC ($AC = BC$), označiti njegova tjemena, stranice i unutrašnje uglove. Odrediti simetralu ugla γ i označiti bisektrisu CD (Slika 1.).



Slika 1.

Nastavnik podstiče učenike da iskažu svojstvo simetrale ugla kod tjemena C, kao i uočavanje trouglova ADC i BDC. Postavlja pitanje o konstantnosti zbira unutrašnjih uglova uočeni trouglova i izražava uglove α i β .

Iz trougla ADC dobijamo:

$$\alpha + 90^\circ + \gamma/2 = 180^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - 90^\circ - \gamma/2$$

$$\alpha = 90^\circ - \gamma/2;$$

Iz trougla BDC dobijamo:

$$\beta + 90^\circ + \gamma/2 = 180^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - 90^\circ - \gamma/2$$

$$\beta = 90^\circ - \gamma/2.$$

Sada zaključujemo da je $\alpha = \beta$.

Dakle, na osnovu jednakosti stranica trougla ABC, $AC = BC$ tj. $a = b$ kao posljedicu imamo da su i unutrašnji uglovi naspram jednakih stranica takođe međusobno jednaki $\alpha = \beta$.

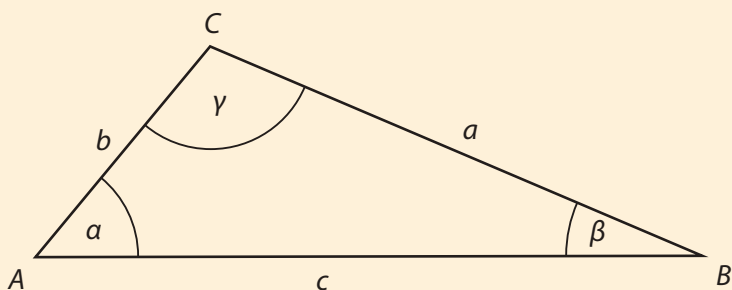
Nastavnik navodi odgovarajuća tvrđenja:

Direktno tvrđenje: Naspram jednakih stranica u trouglu nalaze se jednaki unutrašnji uglovi.

Obrnuto tvrđenje: Naspram jednakih unutrašnjih uglova u trouglu nalaze se jednake stranice.

Nastavnik pojašnjava da će se kasnije detaljnije izučavati i imenovati trougao sa dvije jednake stranice kao i njegova svojstva.

Primjer 2. Nacrtati trougao ABC nejednakih stranica $AB > BC > CA$ ($a > b > c$), geometrijskim priborom iscrtati oblast unutrašnjih uglova tog trougla i obilježiti ih (Slika 2.).



Slika 2.

Bez dokazivanja, koristeći se prethodnim tvrđenjem, navesti učenike na očigledan zaključak:

$$(c > a > b)$$



$$(\gamma > \alpha > \beta).$$

Nastavnik navodi odgovarajuća tvrđenja:

Direktno tvrđenje: Naspram duže stranice u trouglu nalazi se veći unutrašnji ugao.

Obrnuto tvrđenje: Naspram većeg unutrašnjeg ugla u trouglu nalazi se duža stranica.

Nastavnik zadaje zadatke koje učenici rade u paru, vodeći računa o nivoima znanja učenika.

Zadatak 1: Poredati po veličini uglove trougla ABC ako je:

- $|AB| = 7\frac{1}{2} \text{ cm}$, $|BC| = 1 \text{ dm}$ i $|CA| = 5,2 \text{ cm}$,
- $c = 4 \text{ cm}$, $a = b = 5 \text{ cm}$,
- $a = b = |AB|$ i u ovom primjeru odrediti veličine unutrašnjih uglova tog trougla.

Zadatak 2: Uglovi trougla ABC imaju sledeće veličine:

- $\alpha = 53^\circ$ i $\beta = 69^\circ$,
- $\gamma = 42^\circ$ i $\beta = 102^\circ$. Izračunati veličinu trećeg unutrašnjeg ugla i uporediti stranice tog trougla.

Zadatak 3: Dvije stranice trougla su $|BC| = 5,2 \text{ cm}$ i $|AC| = 3,8 \text{ cm}$, a unutrašnji ugao γ je najveći unutrašnji ugao tog trougla.

- Uporediti uglove trougla.
- Koliko centimetara može biti dužina treće stranice trougla, ako se zna da je dužina te stranice izražena cijelim brojem centimetara?
- Koliko prirodnih vrijednosti može imati dužina treće stranice? Učenici prezentuju izradu zadataka.

Završni dio časa (5 minuta)

3. korak/aktivnost

Ponoviti naučena tvrđenja o međusobnom odnosu stranica i uglova u trouglu i obrnuto.

Domaći zadatak: Nastavnik zadaje tri zadatka po izboru iz zbirke zadataka.

UKRŠTENICA

VODORAVNO:

- A: NZD (48, 72)
- C: Najveći prost broj šeste desetice
- D: Prosti činioci broja 21
- E: Najmanji prost broj
- F: Najmanji prirodan broj
- K: NZS (22, 26, 143)

USPRAVNO:

- A: Prosti činioci broja 70
- B: Kvadrat broja 7
- D: Složen broj čiji su svi prosti činioci: 2, 7 i 23
- F: Proizvod četiri dvojke
- I: 2^3

A	B	
C		
D		
E		F
K	I	

Dijana Božović, JU OŠ „Marko Miljanov“, Bijelo Polje

Rješenje zadatka sa naslovne strane Dijagonale 9:

$$M = 4$$

MATEMATIKA STAROG EGIPTA



Sfinga (naprijed) i piramida (iza) u Egiptu

Staroegipatska civilizacija je jedna od najstarijih stvorenih na Zemlji, a o njoj ujedno najviše znamo zahvaljujući brojnim pisanim izvorima. Matematika svoje najranije korijene vuče upravo sa ovih prostora. Na osnovu crteža iz pećina i piramida, danas sa sigurnošću možemo tvrditi da su za veliki pomak



Hijeroglifi

u napretku matematike zaslužni egipatski pisari.

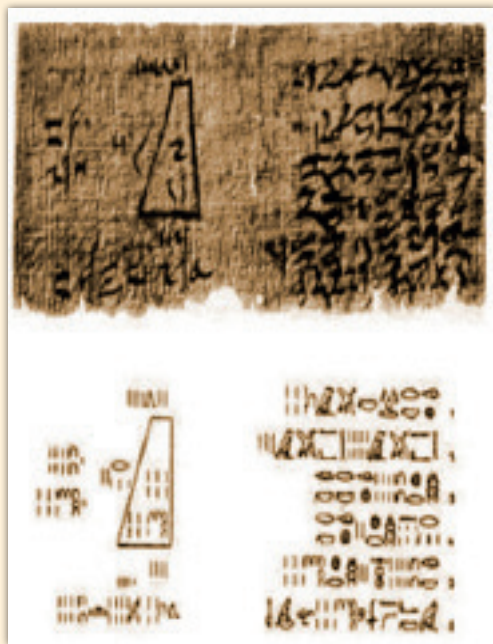
Matematička znanja toga doba bila su zapisivana na papirusu. Danas najpoznatiji izvori jesu **Rajndov papirus** sa 85 matematičkih problema (ili 87, po nekim izvorima) i **Moskovski papirus** sa 25 zadataka i najvećim dostignućima egipatske geometrije. Odavde nam je poznato da su Egipćani poznavali razlomke i sve četiri računске operacije ne mnogo drugačijim nego što ih mi danas upotrebljavamo.

Na osnovu istorijskih izvora koji su nam danas dostupni, zaključujemo da je egipatska matematika bila praktična empirijska disciplina bez pokušaja i bez svijesti da je matematička znanja na bilo koji način potrebno dokazivati. Matematika je u Egiptu bila okrenuta praktičnim pitanjima državne uprave i potrebama poljoprivrede.

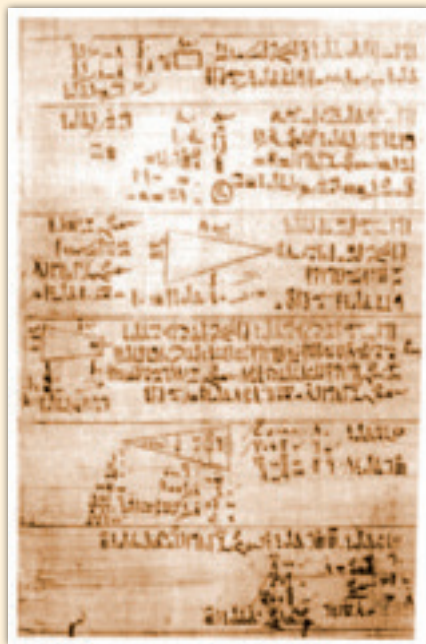
Iz Rajndovog papirusa saznajemo kako su Egipćani množili. Recimo da želimo da pomnožimo 29 i 45. Uzmimo 45 i saberimo ga sa samim sobom. Dobijeni rezultat ponovo saberemo sa samim sobom, i na taj način dobijamo tabelu:

29	45
1	45
2	90
4	180
8	360
16	720

Dalje nema potrebe da idemo jer je $32 > 29$. Međutim, zaključujemo da je $29 = 16 + 8 + 4 + 1$, pa saberemo brojeve na pozicijama 1, 4, 8 i 16 i dobijamo rezultat 1305.



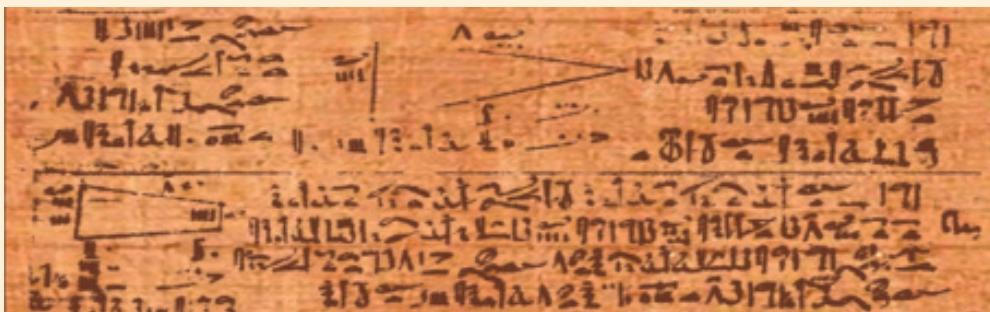
Rajndov papirus



Moskovski papirus

U Egiptu, u muškom obrazovanju, jedno vrijeme matematika se nije smatrala važnom. Đaci su učili samo osnovna znanja iz aritmetike i algebre koja će im biti potrebna za obavljanje poslova, kao što je zapisivanje prinosa žetve. Kasnije, matematika je bila nezaobilazan segment života tamošnjih ljudi. Koristili su je za izračunavanje plata shodno obavljenom poslu, za izračunavanje površina parcela, za prevođenje mjera iz jedne u drugu i još brojne druge svrhe.

Matematika starog Egipta imala je snažan uticaj i na prirodne nauke brojnih drugih zemalja širom svijeta, a dala je određeni pečat i na matematiku antičke Grčke. Teorema koju danas nazivamo Pitagorinom, stotinama godina prije njega poznavali su Egipćani i Vavilonci.



Zapis na papirusu

Pisari su u Egiptu igrali važnu ulogu u prikupljanju i čuvanju matematičkih znanja. Zahvaljujući njima, razvijala se i prepoznatljiva egipatska arhitektura koja ih je poprilično zahtijevala. Preciznost u gradnji bilo je teško izvesti raspoloživim sredstvima i alatom, pa su zato znanja iz geometrije bila široko primjenjivana i, na kraju krajeva - neophodna. Geometrija, već samim svojim nazivom otkriva i svoje grčko porijeklo, a koja bi, doslovno prevedena, značila „mjerenje zemlje”.

Danas se najvećim čudom egipatske arhitekture u pogledu geometrije smatra Keopsova piramida kod koje je primijećeno mnogo pojedinosti koje su značajne i u savremenoj arhitekturi i građevinarstvu. Pravi uglovi piramide su tačni do ispod jedan posto, a stranice dužine 230 metara u dužini se razlikuju samo 20 cm.



Izgradnja piramide

Miljana Stanković i Luka Bojanović
učenici IX-3 odjeljenja JU OŠ „Radojica Perović“ - Podgorica

ZANIMLJIVI PODACI

Pitagorin „prijatelj”

Kada su pitali *Pitagoru* šta je to prijatelj odgovorio je:

„Moje drugo ja, kao što su prijateljski brojevi 220 i 284. A dva broja su prijatelji ili u prijateljskom dosluhu, kada je svaki od njih zbir svega onoga što je mjera drugoga.”

Zbir djelilaca broja 220 ne uračunavajući sam taj broj je:

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284.$$

Slično zbir djelilaca broja 284 je:

$$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220.$$

Podsjetimo da je *Leonard Ojler* mnogo vjekova nakon Pitagore otkrio 60-ak parova prijateljskih brojeva.

Iracionalni brojevi bez imena

Najznačajnije otkriće koje je pripisano Pitagorejcima je otkriće iracionalnih brojeva, koji su današnji naziv dobili tek kasnije. Naime, polaznici Pitagorine škole su tražili geometrijsku sredinu brojeva 1 i 2, ta dva po njima sveta simbola. Zaključili su da se takav broj ne može predstaviti odnosom cijelih brojeva.

Kralj Ptolomej

Jednom prilikom je kralj Ptolomej posjetio biblioteku u Aleksandriji (Egipt), koja je u to vrijeme bila poznata po svom bogatom fondu. Kralj se prilično zadržao u pregledanju svitaka Euklidovih „Elemenata”, nakon čega je upitao *Euklida* da li postoji kraći put za matematiku od onog koji je on izložio u svom djelu. Euklid mu je odgovorio: „U geometriji nema direktnog puta koji bi bio rezervisan za kraljeve.”

Aleksandar Veliki

Kada je Aleksandar Veliki zatražio od *Menehma* da ga nauči matematiku, ovaj mu je odgovorio: „Po zemlji postoje kraljevski putevi i putevi za građane, ali u matematici nema kraljevskog puta.”

ZANIMLJIVI PODACI

Arhimedov spomenik

Valjak u kome je upisana lopta i kupa čija je osnova podudarna osnovi valjka je slika koju je otkrio poznati rimski govornik i državnik Ciceron (106 - 43 p.n.e.) u Sirakuzi na spomeniku *Arhimeda*. Prečnik osnove valjka urezanog na Arhimedovom spomeniku jednak je visini valjka. Lako se dokazuje da se zapremine kupe, lopte i valjka urezanih na Arhimedovom spomeniku odnose kao 1:2:3.

Lagranžovo odustajanje

Lagranž je pred kraj života povjerovao da je izašao na kraj sa aksiomom o paralelama. Pripremio je članak o tome i otišao u akademiju da ga pročita. Na početku čitanja nešto mu se nije slagalo te je bacio kredu na katedru i izašao rekavši da treba o ovome još malo da razmisli.

Fibonačijeva greška

Leonardo iz Pize (1180 - 1250), poznatiji kao Fibonači, sakupljao je i rješavao razne probleme iz matematike. Između ostalog bavio se i klasičnim problemom o lavu u jami, koji glasi:

„Jama je duboka 50 stopa. Lav se popne $\frac{1}{7}$ stope svakog dana i zatim sklizne nazad $\frac{1}{9}$ stope svake noći. Koliko će mu dana biti potrebno da izađe iz jame?”

Fibonači je ovaj zadatak riješio tako što je pošao od broja 63 koji je djeljiv sa 7 i sa 9, i našao da će se za 63 dana lav popeti 9 stopa i skliznuti 7 stopa. Po tome lav napreduje $\frac{2}{63}$ stope svakog dana.

Dalje je koristeći proporciju Fibonači izračunao da će lavu biti potrebno $(50 : 2) \cdot 63 = 1575$ dana da stigne do vrha jame. Međutim Fibonačijev odgovor je pogrešan. Naime, na kraju 1571. dana će biti samo $\frac{8}{63}$ stopa do vrha i sledećeg dana će stići do vrha ($\frac{1}{7} > \frac{8}{63}$). Takođe kada se dokopa izlaza, lav neće, kao prethodnih dana skliznuti nazad za $\frac{1}{9}$ stope.

REKLI SU O MATEMATICI

„Matematički pojmovi nijesu proizvoljna tvorevina uma već odraz realnog, objektivnog svijeta, mada često u veoma apstraktnom obliku.”

(Holandski matematičar D.J. Strojck)

„Dokaz da matematika prevazilazi jednostavnošću i značajem sve druge nauke leži u tome što ona obuhvata odjednom mnoge objekte nezavisno od njihove prirode.”

(Dekart)

„Matematika je nauka o vezi između veličina, a veličina je sve ono što može biti jednako ili nejednako nečem drugom.”

(Grasman)

„Matematika u strogom smislu riječi, jeste apstraktna nauka koja deduktivno istražuje zaključke dobijene iz osnovnih pojmova prostornih i numeričkih odnosa.”

(Mjuraj)

„Predmet matematike je otkrivanje zakona mišljenja.”

(Silvester)

„Matematika je dominantna nauka našeg doba. Onaj ko neće da je upotrijebi danas za sebe, sutra će naći da je ona upotrijebljena protiv njega.”

(Herbart)

„U većini nauka jedna generacija obara ono što je druga prije nje stvorila. U matematici svaka generacija dograđuje na ono što su druge prije nje stvorile.”

(Hankel)

„U matematici ima veoma mnogo mašte. Više mašte je imao Arhimed nego Homer.”

(Volter)

„Matematika predstavlja kapiju i ključ nauka. Zanemarivanje matematike nanosi štetu svakom znanju jer onaj koji je ne zna, ne može znati ni druge nauke.”

(Bekon)

Štampanje ovog broja pomogli su:



DOMEN d.o.o.
PODGORICA



BEMAX

BEMAX d.o.o.
PODGORICA



Imate prijatelje!

MTEL d.o.o. – PODGORICA

HVALA NAŠIM PRIJATELJIMA!

Uredništvo poziva nastavnike, učenike i sve čitaoce da nam šalju priloge za list: članke, odabrane zadatke, zanimljivosti, priloge za zabavnu matematiku itd.

Dio tiraža ovog broja „Dijagonale“ će biti besplatno podijeljen svim bibliotekama osnovnih škola u Crnoj Gori.
Ovaj broj se može kupiti u „**Gradskoj knjižari**“ i „**Narodnoj knjizi**“.

Sve informacije o pretplati i porudžbini ovog i narednih brojeva možete naći na sajtu Udruženja. Narudžbe slati putem mejla.
Broj žiro računa UNMCG je **550-18240-71** kod Podgoričke banke.

Adresa redakcije je: Ul. Gojka Berkuljana br. 20, Podgorica.

Mejl: udruznastmatem@gmail.com

www.unmcgwordpress.com

CIP - Каталогизација у публикацији
Национална библиотека Црне Горе, Цетиње

ISSN 2536-5851 = Dijagonala
COBISS.CG-ID 36769808

ISSN 2536-5851



9 772536 585009 >